UNIVERSIDADE SEVERINO SOMBRA

WENDEL DE OLIVEIRA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Vassouras

2011

WENDEL DE OLIVEIRA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em 28/04/2011 à Universidade Severino Sombra. Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* - Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Orientadores: Júlio César da Silva
Ilydio Pereira de Sá

Vassouras

2011

Silva, Wendel Oliveira.
Uma proposta para o ensino de funções e suas representações gráficas / Wendel de Oliveira Silva. Vassouras, RJ, 2011.
203.
Orientadores: D. Sc. Júlio César da Silva
M. Sc. Ilydio Pereira de Sá
Dissertação (Mestrado) - Universidade Severino Sombra, Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação Matemática

WENDEL DE OLIVEIRA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática à Universidade Severino Sombra. Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* – Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

D. Sc. Júlio César da Silva, Universidade Severino Sombra

M. Mc. Ilydio Pereira de Sá, Universidade Severino Sombra

D. Sc. Carlos Eduardo Costa Vieira, Universidade Severino Sombra

D. Sc. Carlos Victor de Alencar Carvalho, Universidade Severino Sombra

D. Sc. Nielce Lobo, UNIBAN

DEDICATÓRIA

Dedico primeiramente a Deus pela inspiração e saúde. Aos meus pais José Antônio e Vera Lúcia, pela vida e pelos ensinamentos. A meu filho Wagner Silva pela esperança. A minha família pela torcida e incentivo. A minha noiva Elaine pelo carinho e compreensão e aos amigos pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço de coração as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, na realização deste trabalho:

Aos meus amigos e orientadores prof. Dr. Júlio César da Silva e prof. Ms. Ilydio de Sá pela competência, dedicação e incentivo, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

À Lícia Giesta e ao prof. Dr. Carlos Eduardo Mathias pela confiança ao me convidarem a atuar na função de tutor da Lante-UFF junto ao curso de Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, função essa que contribuiu intelectualmente e financeiramente.

Aos grandes amigos: Ramon Carvalho da Fonseca e Karina Bouquard.

Aos professores e colegas do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da USS.

A professora Drª Nielce Lobo, que gentilmente aceitou fazer parte da banca examinadora.
Aos professores Dr. Carlos Victor e Carlos Eduardo que também compuseram a banca.

Ao Colégio Cenecista prof. Sérgio Ferreira (CNEC) e a Escola Estadual Dr. Alfredo Castelo Branco, que através de suas direções, colaboraram para que eu pudesse concluir o Mestrado.

Aos meus queridos alunos do 3º período de Matemática (ano 2010): Adriana, Adrielly, Aguinaldo, Carlos Eduardo, Claudiane, Elisiane, Fernando, Fluviane, Giselle, Gleidiane, Kelly, Laila, Márcio, Marcos, Michel, Murilo, Rafael, Rafaela, Raquel, Sirlândia, Stefanie, Stephania, Taina, Taiz, Tamires, Thainara, Vilma e Viviane, por colaborarem, voluntariamente, com grande empenho e entusiasmo, com minha pesquisa. Minha especial gratidão!

Enfim, a todos: **MUITO OBRIGADO!!!**

RESUMO

O projeto de pesquisa apresenta um estudo de caráter diagnóstico objetivando a investigação do conhecimento dos alunos no que se refere à construção gráfica de diversas funções aplicando conceitos de transformações geométricas no plano e a sua capacidade para aplicá-la em situações-problemas. Fundamentado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, no uso das tecnologias no ensino da Matemática e em diversos outros pesquisadores da mesma linha de interesse, a nossa sequência foi aplicada com alunos do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada localizada em uma pequena cidade da Zona da Mata de Minas Gerais.
Os recursos tecnológicos utilizados em nossas intervenções foram o *software Winplot*, o *Kit* Virtual de Apoio (KVA), de própria autoria, além do uso de papel e lápis. A sequência didática foi dividida em três etapas (teste diagnóstico, intervenções e teste final). Com os resultados finais, pudemos constatar um avanço significativo acerca do tópico funções especificamente no traçado de gráficos através das transformações geométricas no plano e sua aplicação em situações do cotidiano.

Palavras-chave: Funções, Gráficos, Vídeo Tutorial, *Winplot*

ABSTRACT

The research project presents a study of diagnosis character aiming the investigation of student´s knowledge concerning to graphic construction of various function applying concepts of to be applied in problem situations.

Fundamented on the Instructive Situations Theory from Guy Brousseau, on the Conception Camp Theory from Gerárd Vergnaud on the technology uses on Maths teaching and on different researches from the same interests line, our sequency was applied on a private college situated in a small town in Zona da Mata, Minas Gerais.

The technological resourses used in our interventions were: software Winplot, the Virtual Kit Support (KVA), from it´s own anthorship, besides the uses of paper and pencil. The instructive sequency was divided in 3 stages (diagnosis test, interventions and final test). With final results, we could notice a significant progress about the functions topic mainly on a graphic sketch through the geometrics transformation on the plan and it´s application in evertydays situations.

Key-words: Functions, Graphics, Tutorial Video, Winplot.

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE TABELAS

LISTA DE QUADRO

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

CD	*Compact Disk*
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
ENEM	Exame Nacional da Educação Básica
EJA	Ensino de Jovens e Adultos
ESM	Ensino Superior de Matemática
FEAP	Fundação Educacional de Além Paraíba-MG
INAF	Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IREM	Instituto de Pesquisa sobre o ensino da Matemática
KVA	*Kit* Virtual de Apoio
MEC	Ministério da Educação
MOBRAL	Movimento Brasileiro de Alfabetização
OA	Objeto de Aprendizagem
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
ONG	Organização Não Governamental
PA	Progressão Aritmética
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
pH	Potencial Hidrogeniônico
PISA	Programa Internacional de Avaliação dos Alunos
PPP	Projeto Político Pedagógico
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFRG	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A experiência docente ao longo de seis anos atuando na rede pública e privada de ensino, tem mostrado que a simples oferta de escolarização já não é mais suficiente, é preciso ofertar uma Educação que atenda às necessidades de formação do aluno, preparando este para se tornar um ser crítico, apto a viver em sociedade e agir em seu meio. Observa-se também a necessidade da participação mais ativa da família, bem como um investimento maior em políticas públicas para a Educação.

Dos anseios e inquietações provocados pela minha própria prática docente no ensino de Matemática na Educação Básica e Superior, surgiu a presente pesquisa, que apresenta experiências de ensino utilizando uma metodologia que possibilita a abordagem de assuntos pertencentes ao conteúdo programático de Matemática do ensino básico em especial o estudo das representações gráficas de algumas funções enfocando as transformações geométricas ocorridas no plano, com o auxílio de recursos tecnológicos, bem como sua aplicabilidade em situações do cotidiano.

Na atual sociedade, os meios de comunicação de massa utilizam-se constantemente os gráficos para ilustrarem os mais diversos assuntos. Desse modo, se torna imprescindível a compreensão destes.

> "A visualização está presente de forma muito efetiva na vida do ser humano atual, uma vez que as informações são transmitidas, em sua maioria, visualmente e que a tecnologia desenvolve e possibilita comunicação essencialmente visual. Nesse sentido, considerando que o estudante se insere nesse contexto, a visualização tem um papel importante na formação matemática, principalmente, quando a solução visual de um problema possibilita ao aluno a construção de relações entre conceitos e significados que, em uma abordagem estritamente algébrica, não são construídas" (ARCAVI 1999 *apud* BUENO, 2009, p. 51).

Como podemos observar, os gráficos se constituem como um instrumento cultural e portanto, também é um conteúdo escolar, uma vez que esta instituição é responsável pelo ensino de conhecimentos desenvolvidos pela sociedade ao longo da história.

O fato dos gráficos possibilitarem a representação de dados sobre diversos conteúdos, de diversas áreas do saber como exemplo as ciências naturais e sociais, a língua portuguesa, entre outras, justifica sua real importância, uma vez que tais sistemas de representação não se esgotam como conteúdos de matemática conforme vinha sendo encarada até então, mas permitem essa articulação da Matemática.

Concordamos com Meira (1997 *apud* COSTA, 2004) quando afirma que o aprendizado desse conceito se torna importante pelo fato de tal conceito representar uma parte fundamental da Matemática onde diversos tópicos nos currículos do ensino básico poderiam estar relacionados ao ensino de função, bem como suas representações algébricas e gráficas além de permitir gerar atividades com múltiplos sistemas de representações como tabelas, gráficos, diagramas e equações. Segundo Vygotsky (1994), os gráficos se aprensentam como uma ferramenta cultural que pode ampliar a capacidade humana de sistematização de dados e o estabelecimento de relações entre os mesmos.

Ao ministrar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para os cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil da Fundação Educacional de Além Paraíba (FEAP), pudemos constatar as dificuldades dos alunos em esboçar gráficos de determinadas funções, associarem tais gráficos com suas respectivas funções e, sobretudo, compreender a sua real aplicabilidade. Com isso, percebe-se o desestímulo em relação às funções o que interfere diretamente na apredizagem da disciplina, como relata em seu trabalho Oliveira (1997) onde constata que seus alunos apresentam dificuldades em CDI, culminando em reprovações. A autora ainda afirma que o conceito de função é um pré-requisito importante para o estudo de Cálculo e nesse ponto e é que residem as dificuldades do alunos.

Pudemos observar também, ao longo do desenvolvimento da pesquisa, que a dificuldade principalmente na aplicação do teste diagnóstico foi a deficiência de conceitos matemáticos mais elementares pré-requisitos para o sucesso na disciplina de CDI por partes dos alunos participantes, como: operações envolvendo números decimais e frações, radiciação, exponenciação e sobretudo traçado de gráficos de funções onde podemos perceber uma forte dependência dos alunos em relação a utilização de tabelas para a construção dos gráficos, que é um dos objetos de nossa pesquisa.

O aluno faz um estudo mais detalhado sobre funções e suas representações no 1º ano do ensino médio, estudando o conceito de funções, domínio e imagem, gráficos de vários tipos de funções como: quadrática, funções crescentes e decrescentes, funções pares e ímpares, entre outras. No 2º ano do ensino médio, trabalham com funções trigonométricas e seus gráficos. Normalmente, o assunto não é abordado no 3º ano, mas utilizam-se os conceitos de funções em outros conteúdos. Ao ingressarem em cursos de graduação, onde a disciplina de CDI pertence ao currículo, o assunto volta a ser abordado normalmente como pré-requisito para o ensino de Limites, Derivadas, Integrais e suas aplicações.

No processo de ensino-aprendizagem, o professor prepara uma situação que compreende tanto o meio material, que são os objetos necessários como jogos, fichas, problemas, provas, experimentos, quanto o modo com que o aprendiz vai interagir com esses objetos, ou seja, as “regras do jogo”. O aluno aprende na medida em que a situação se desenvolve, isto é, que ele interage com o material, em busca da solução dos problemas. Ao agir sobre o meio, o aprendiz manifesta seus conhecimentos, aprende se adaptando a um meio que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como fez a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta pelas respostas novas que são a prova da aprendizagem (BROUSSEAU, 1986).

O objeto de estudo dessa dissertação é analisar o processo de ensino-aprendizagem de funções enfocando as construções gráficas com auxílio de recursos tecnológicos como o *software Winplot* e o *Kit* Virtual de Apoio (KVA), de autoria própria, que consiste em pequenos tutoriais confeccionados com o *software Wink* e *applets* onde buscamos instigar o aluno a investigar os diversos movimentos dos gráficos que ocorrem no plano inerente a algumas funções. Além dos *softwares*, foram utilizados também problemas que envolveram situações-problemas extraídos dos livros didáticos mais utilizados na atualidade.

Para atingir o objetivo proposto, devem-se seguir as seguintes etapas que são os objetivos específicos:

- Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos no que diz respeito às representações gráficas e sua aplicação;
- Apontar caminhos para melhorias do ensino de funções e suas construções;
- Utilizar recursos tecnológicos como auxiliador no processo de ensino-aprendizagem de funções e suas representações;
- Construir materiais de apoio para o ensino de funções;
- Utilizar situações do cotidiano para ilustrar aplicação de funções.

O presente trabalho está estruturado em 4 capítulos. O primeiro capítulo, intitulado “Referencial Teórico”, destina-se a fundamentação teórica onde abordamos sucintamente a Teoria da Situação Didática de Guy Brousseau, a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, ambos teóricos da linha Didática Matemática Francesa. Abordamos também uso das tecnologias no ensino da Matemática, onde procuramos enfatizar o impacto da tecnologia junto a Educação Matemática.

No segundo capítulo, intitulado “Ensino de Funções”, analisamos o ensino de funções no currículo da Educação Brasileira sob a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e sua importância para o cotidiano dos alunos.

O terceiro capítulo, intitulado “Uma proposta para o ensino de funções”, apresentamos a descrição do projeto com os procedimentos metodológicos aplicados no desenvolvimento da pesquisa e a identificação dos sujeitos participantes da pesquisa tal como a detalhamento das etapas do estudo.

No quarto capítulo, intitulado “Resultados e discussões”, apresentamos as análises dos fenômenos ocorridos no permear das atividades, baseando-se nos resultados obtidos com a análise das produções dos alunos juntamente com nossas observações.

Nossa pesquisa culminou com as conclusões finais e sugestões de trabalhos futuros onde apresentamos uma síntese das nossas percepções e concepções acerca dos resultados do presente estudo.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Um dos grandes desafios de todos os educadores é criar estratégias de ensino-aprendizagem que sejam realmente eficazes. Para tal, o professor necessita, além de dominar o conteúdo da disciplina que leciona, conhecer as didáticas específicas de sua área. Dessa forma, favorece o bom planejamento de novas situações de aquisição do saber.

O professor precisa saber o que ensina, para que ensinar e como ensinar. É preciso usar o saber de forma prática e significativa em prol de seu educando. "(...) Não somos apenas objeto da História, mas seus sujeitos igualmente. A partir deste saber fundamental: mudar é difícil, mas é possível, que vamos programar nossa ação político-pedagógica" (FREIRE, 1996, pg. 46).

Esta área de pesquisa abrangeu uma grande diversidade de temas e aspectos relativos ao conhecimento matemático dando origem a diversas tendências teóricas dentre elas a Didática da Matemática. Essas novas tendências nos mostram diversas concepções da educação, das mais tradicionais às mais libertadoras referentes à prática escolar.

> "A didática da matemática estuda os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente numa situação escolar ou universitária. Ela se propõe a descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não reduz a pesquisar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção particular" (PAIS, 2002b, p. 10-11).

De acordo com D´Amore (2007) a Didática Matemática é a arte de propiciar e manter condições que podem determinar a aprendizagem significativa de um determinado conhecimento matemático por parte de um sujeito (uma pessoa ou uma instituição, por exemplo). Sob essa perspectiva, a aprendizagem se torna um conjunto de transformações comportamentais que direcionam, para um observador previamente estabelecido, segundo sujeito em jogo, onde o primeiro sujeito dispõe do conhecimento ou competência, o que impõe a gestão de diversas representações, o uso de diferentes linguagens, o domínio do conjunto de referências, de uma importante experiência. Essas condições devem ser colocadas em prática e reproduzidas intencionalmente, caracterizando-se as práticas didáticas que por sua vez é objeto de estudo da didática.

Saber ensinar não é a simples transferência de conhecimento. É possibilitar ao educando a construção do seu próprio saber. D´Ambrosio (2001) reforça essa convicção, ao afirmar que:

> “A educação formal é baseada ou na mera transmissão (ensino teórico e aulas expositivas) de explicações e teorias, ou no adestramento (ensino prático com exercícios repetitivos) em técnicas e habilidades. Ambas as alternativas são totalmente equivocadas em vista dos avanços mais recentes do nosso entendimento dos processos cognitivos” (D´AMBROSIO, 2001, p. 119).

Na Educação Matemática, a Didática da Matemática traz uma valiosa contribuição para profundas reflexões para a prática pedagógica do professor no sentido que objetiva controlar e garantir um ensino-aprendizado significativo aos seus alunos.

Conforme afirma Pais (2001, p.10): “a Educação Matemática é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática, nos diversos níveis de escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática”.

Neste capítulo, refletiremos brevemente sobre a Teoria das Situações Didáticas, Teoria dos Campos Conceituais e o uso das tecnologias que nos darão o suporte teórico necessário para a elaboração e análise de nossa pesquisa. Tais teorias têm-se apresentado como um grande potencializador teórico e metodológico para diversos pesquisadores na análise do processo de ensino da Matemática em diversos estudos.

1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Guy Brousseau (2000) é um instrumento científico que pretende unificar as contribuições de outras disciplinas com o objetivo de possibilitar uma melhor compreensão das possibilidades de melhoramento no ensino de Matemática. De acordo com a TSD, o ambiente de sala de aula é caracterizado pela tríade (professor-aluno-saber). Esses três elementos são os principais componentes de um sistema didático denominado por Brousseau como Triângulo das Situações Didáticas (Figura 1).

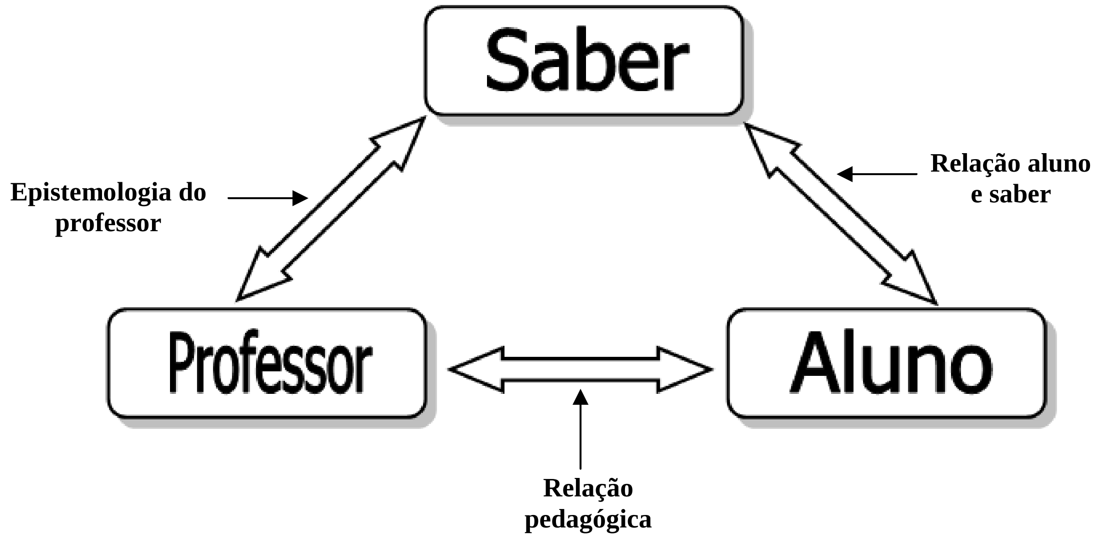


Figura 1: Triângulo das Situações Didáticas

No mesmo período histórico dessa proposta de teoria, a perspectiva predominante no campo da educação era, em essência cognitivista, influenciado por Piaget e colaboradores, centrando o papel da ação no desenvolvimento cognitivo, na originalidade do pensamento matemático e nas etapas do desenvolvimento nas crianças. Contudo, não havia a preocupação quanto à aprendizagem específica de cada conhecimento matemático ao considerar a estrutura formal e a função da lógica como fundamentais.

De acordo com Gálvez (1996 *apud* POMMER, 2008), a teoria de Brousseau explica a relação das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no âmbito da Educação Matemática, possibilitando compreender as interações sociais que acontecem na sala de aula entre os agentes envolvidos: professor-aluno, as condições e a forma pelo qual o conhecimento matemático pode ser aprendido. O controle destas condições permite reproduzir e melhorar o processo de aquisição do conhecimento matemático escolar.

Essa teoria exprime a forma como podemos conceber e transmitir ao aluno o conteúdo matemático. Dessa forma, ela vem de encontro aos anseios pedagógicos desse projeto na medida em que ela apregoa o vínculo da apresentação do conteúdo matemático ao cotidiano do aluno fornecendo ao mesmo um verdadeiro sentido, justificando assim sua aprendizagem. Do contrário, quando o conteúdo é apresentado de forma isolada e sem conexão com a realidade, torna-se desprovido da verdadeira expressão educativa. O objetivo de Brousseau ao sugerir a TSD era padronizar o modelo de ensino realizado em um sistema didático. Segundo Brousseau (1997) uma situação envolve uma pessoa, a circunstância onde ela está envolvida e as relações estabelecidas entre ela e o meio.

Como afirma Brousseau (1986 *apud* FREITAS, 2002), a forma didática como o professor apresenta um determinado conteúdo matemático influencia diretamente o significado do saber matemático que este adquira.

> "Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes" (BROUSSEAU, 1986 *apud* FREITAS, 2002. p.67).

Desse modo, uma situação didática acontece quando se estabelece uma relação pedagógica entre o conhecimento matemático (saber matemático), o professor e os alunos, em um ambiente escolar, objetivando desenvolver atividades que propiciem o ensino-aprendizado de um conteúdo específico.

As situações didáticas são definidas como "as situações que servem para ensinar" (BROUSSEAU, 1997, p.2). Essas situações padronizam as relações entre um ou mais agentes com o meio. Para Brousseau, o agente pode ser o professor, quando organiza uma situação propícia ao aprendizado ou o aluno quando age sobre o meio e, nessa ação, ele aprende. Os agentes se relacionam com o meio de forma racional de acordo com as regras da situação.

Almouloud (2007) complementa afirmando que o objeto principal da Didática Matemática é o efetivo processo de aprendizagem através de uma variedade de séries reprodutíveis que são as situações didáticas. Essas situações são fundamentais para o desenvolvimento do aluno.

Em busca de um modelo de ensino eficaz, Brousseau, através de observações em sala de aula, classificou as situações inicialmente em didáticas e adidáticas. As situações didáticas são aquelas em que, por exemplo, o professor projeta uma sequência didática objetivando ensinar, ou seja, modificar ou promover o saber em outro agente, que nesse caso, é o aluno. Por sua vez, o aluno responde não necessariamente em busca de resposta ao problema, mas para dar a resposta esperada pelo professor.

Já as situações adidáticas acontecem quando a evolução do aluno não está diretamente condicionada às intervenções do professor: o aluno tem a consciência de que o problema foi elencado com a finalidade de fazê-lo adquirir o conhecimento esperado, mas ele também deve saber que esse conhecimento pode ser fomentado sem utilizar as razões didáticas

(BROUSSEAU, 1986). O aluno busca a solução, mas nesse caso não para dar a resposta que o professor solicita, mas pelo simples fato de resolver o problema por si só. Nesse sentido, o contexto escolar, que vem dando a sustentação e existência à situação não é mais considerado. Com isso, o problema em questão é identificado pelo aluno como um problema “real”.

Observamos que em qualquer situação de ensino existe um contrato didático inserido que vai se constituindo à medida que se desenvolve as relações professor-aluno na gestão dos saberes. A função do contrato didático é administrar as relações estabelecidas entre o professor, aluno e o saber, promovendo o ensino significativo, permitindo aos agentes envolvidos no processo, efetivar seus papéis de aprendizes e produtores de conhecimento. Este se estabelece mediante ao jogo de relações e obrigações recíprocas específicas ao conteúdo, sendo essa relação sempre mediada pelo saber.

Há comportamentos esperados tanto do aluno para com o professor quanto do professor para com o aluno. É através das regras estabelecidas pelo contrato didático (explícito ou implícito) instituídas pelas situações propostas na relação didática, que os alunos concretizam a passagem da dependência para a autonomia (PINTO, 2003).

Segundo Brousseau (1986 *apud* PAIS, 2001), observamos que mais importante que tentar justificar as regras intrínsecas ao contrato didático é delinear alguns de seus possíveis pontos de ruptura. É impossível explicar todas as regras, pois suas interpretações são quase sempre subjetivas e imprevisíveis. Assim, não se podem detectar as localidades dos pontos de ruptura.

Apesar da dificuldade, Pais (2001) afirma que:

> “(...) é conveniente estimar situações vulneráveis da atividade pedagógica escolar, na qual o processo de ensino e aprendizagem pode ser obstruído. Assim, as causas, os momentos e as condições dessa ruptura não podem ser previstos totalmente, pois ocorrem no transcorrer da dinâmica das situações didáticas e estão também relacionadas à dimensão subjetiva dos sujeitos envolvidos” (PAIS, 2001. p. 81).

Um exemplo referente a essa ruptura é dado por Pais (2001) quando afirma que essa ruptura pode ocorrer quando o aluno não encontra motivação pelo problema proposto pelo professor ou quando não há envolvimento necessário nas atividades. Mesmo não havendo uma regra explícita prevendo esse envolvimento, é de se esperar que isto aconteça e dentro dos limites inerentes à atividade pedagógica.

Sabemos que pela TSD, o educador deve instigar o aluno no sentido que o mesmo apresente reações comportamentais, em que o próprio aluno, com o objetivo de demonstrar seu conhecimento, teria que aprender sozinho. Parece contraditório! Como de fato, segundo Brousseau (1998, *apud* PINTO, 2003) há um paradoxo na relação didática: o professor anseia que o aluno produza respostas coerentes, coroando dessa forma sua intervenção no processo de ensino-aprendizado. Porém, o mesmo aluno não dispõe de meios cognitivos suficientes para tal. Diante desse impasse, o professor pode trabalhar sob duas perspectivas distintas: dizer ao seu aluno exatamente o que se deseja obter como reposta ou, do contrário, não fornecer nenhuma ferramenta que o auxilie na resolução de situações-problemas. O bom contrato didático é aquele que se torna obsoleto e inútil. A identificação e a superação dessa ruptura é uma condição fundamental para que o processo educativo aconteça de forma significativa.

Brousseau (1992), em sua percepção construtivista da situação didática, defende uma aprendizagem onde o aluno precisa se adaptar às necessidades de um problema para solucioná-lo, opondo-se a forma tradicional de ensino.

Em síntese, a TSD aborda a maneira como podemos compreender e ensinar o conteúdo matemático ao aluno vislumbrando um ensino aprendizado mais significativo. A relação didática se faz pelas relações pedagógicas no ambiente escolar entre a tríade (professor-aluno-saber matemático). Através de situações adidáticas, podemos entender a interação entre a escola e o espaço maior da vida, na medida em que o aluno resolve de forma independente uma determinada situação que foge ao controle do professor. No contrato didático alinham-se as condições e regras de funcionamento da educação no âmbito da sala de aula, focando as obrigações e suas quebras entre aluno e professor.

Por fim, aplicando a TSD, podemos afirmar que é dever do professor, no planejamento de suas intervenções pedagógicas, elaborar as situações didáticas e adidáticas necessárias ao aprendizado do aluno, objetivando facilitar a transposição do saber ensinado para o saber aprendido.

1.2. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud trouxe grandes benefícios junto à compreensão do ensino-aprendizagem de funções mediante a resolução de situações-problema. “Como o saber escolar localiza-se entre o saber cotidiano e o saber científico, a teoria dos campos conceituais permite atribuir aos conceitos um significado de natureza educacional, servindo de parâmetro orientador para que a educação escolar não permaneça na dimensão empírica do cotidiano nem se perca no isolamento da ciência pura". (PAIS, 2001, p. 52).

Vergnaud é psicólogo, pesquisador, professor, discípulo e aluno de doutorado de Jean Piaget. Doutor Honoris Causa da Universidade de Genebra, é um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática e do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) na França. No Brasil, a TCC serviu como fundamentação teórica para a elaboração dos PCN para o ensino da Matemática. Tal afirmação pode ser facilmente verificada no trecho extraído do próprio documento:

> "Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; [...] compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico" (BRASIL, 2006, p.69).

Sua teoria procura ampliar e redirecionar as operações lógicas gerais das estruturas gerais do pensamento, objeto de estudo de Piaget, para o estudo do pensamento cognitivo do "sujeito-em-ação". É uma das teorias mais importantes da Educação Matemática Contemporânea e tem auxiliado pesquisadores a compreenderem a forma com os quais os alunos assimilam os conceitos matemáticos mediantes observações e intervenções, procurando de tal maneira responder a pergunta central de como o sujeito aprende em situação.

Segundo Vergnaud (1998 *apud* MOREIRA, 2002), a TCC foi também inspirada nas teorias de Vygotsky devido à importância atribuída à interação social; à linguagem e à simbolização no processo de aquisição de um campo conceitual por parte do aluno. A TCC segue uma linha construtivista, priorizando a aquisição de conceitos e contrapondo-se a proposta tradicionalista de ensino onde o processo de aprendizagem limita-se ainda a simples transmissão de informação, numa espécie de "via única" onde o aluno é um agente passivo no processo de ensino-aprendizagem.

Vergnaud (1990) define a TCC da seguinte maneira:

> “A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competência complexa notadamente das que se revelam das ciências e das técnicas” (VERGNAUD, 1990a, p. 135).

Conforme alude Vergnaud (1990 *apud* JUNIOR, 2008), há três justificativas para que se utilize o TCC como uma forma de analisar a obtenção do conhecimento:

- *Um conceito não se forma a partir de um só tipo de situação*. Esta afirmação nos sugere a necessidade da diversificação das atividades no ensino permitindo que o aluno aplique um determinado conceito em diversas situações, fazendo a integração entre as partes. Reforçamos aqui a importância dos recursos tecnológicos como um agente mediador. Como exemplo, ao propormos atividades investigativas com o uso de *softwares* matemáticos, como o *Winplot*, estamos fornecendo bases para que os sujeitos-em-ação possam testar seus modelos explicativos em contextos diversos, viabilizando assim um enriquecimento ou reformulação de tais modelos.
- *Uma situação não se analisa com um só conceito*. Tal afirmação justifica uma visão integradora do conhecimento podendo contribuir para a aquisição do saber por parte dos alunos. Preconiza-se aqui uma redução na quantidade dos conteúdos trabalhados em sala de aula em prol da centralização do conceito-chave.
- *A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo*. Conforme afirma Vergnaud (1982 *apud* MOREIRA, 2002), essa teoria organiza-se em campos conceituais, em que o domínio por parte do sujeito é um processo moroso que ocorre ao longo de um largo período temporal através da experiência, maturidade e aprendizagem. É necessário que o aprendiz se depare com novos problemas e novas propriedades ao longo de vários anos se desejarmos que o aprendiz domine um determinado conteúdo.

Seja dentro ou fora da escola, o aluno se depara com diversas situações e, através de sua experiência, desenvolve concepções e competências. Sob essa perspectiva, o nível de conhecimento adquirido pelo aluno se torna significativo e facilmente percebido por aqueles que elaboram as ações didáticas.

Segundo Vergnaud (1993 *apud* PICOLLI, 2006), a construção de um conceito está simbolicamente relacionada a três elementos que podem ser representados como uma função **f(S,I,R) = campo conceitual**, onde "**S**" é um conjunto de situações que dá significado ao objeto; "**I**" representa o conjunto de invariantes que corresponde as propriedades dos objetos e "**R**" que são as representações simbólicas que possibilitam relacionar o significado com as propriedades do objeto. É função do professor identificar quais conhecimentos os alunos conseguem explicitar e quais os que eles usam corretamente mas ainda não explicitam.

Ainda conforme Picolli (2006) podemos avaliar uma determinada situação de aprendizagem sob três aspectos:

- Acerto e erro: no caso de acerto devemos verificar os meios utilizados pelo aluno para a obtenção do sucesso. Caso contrário, a análise possibilitará o professor identificar as dificuldades inerentes ao processo por parte do aluno;
- Tipo de estratégia utilizada: verifica-se se é mais ou menos competente ou mais ou menos econômica;
- Capacidade de escolher o melhor método para resolver o problema na situação apresentada: os objetivos do saber escolar e a TCC estão unidas para a realização da aprendizagem da Matemática. Como a Matemática oferece uma estruturação progressiva dos conceitos, a TCC se torna fundamental ao ensino-aprendizagem.

De acordo com Vergnaud (1998), o desenvolvimento da cognição do sujeito é extremamente influenciado pelos conteúdos de ensino. A TCC parte do pressuposto que o ponto cerne do desenvolvimento cognitivo do sujeito seja o processo de conceitualização do real. Sob essa perspectiva, cabe aos docentes elaborarem atividades que promovam situações problematizadoras que apresentem, de certa forma, significado para os discentes objetivando se tornar propício o surgimento da aquisição do conceito e sua estrutura.

Nessa pesquisa, pretendemos criar situações diversas de conflitos aos alunos participantes. Situações essas que não estão habituados a enfrentar, fazendo com que se questionem acerca de seus conhecimentos sobre funções e sua real aplicabilidade. Como exemplo, propomos aos alunos diversos problemas cujas soluções recorrem ao conceito de funções. Aplicamos uma atividade que apresentava vários gráficos e pedimos para que os alunos destacassem os que eram gráficos de funções. Criamos assim uma situação de conflito, pois conjecturamos que os alunos acreditam que qualquer gráfico representa uma função.

Esse desenvolvimento cognitivo não pode ser contemplado com modelos simples, seja recorrendo a ideias de reprodução social, seja pela emergência de estruturas inatas do indivíduo ou até mesmo por meio da metáfora da mente como processo da informação.

Segundo esta teoria, é possível observar que o tópico matemático funções tem intrínseco a ele uma grande diversidade de outros conteúdos matemáticos como conceitos de álgebra e conceito de par ordenado que são conhecimentos pré-requisitos que fornecem situações para o aprendizado de função. Fica evidenciado, portanto que não se pode estudar um novo conceito de forma isolada e sim relacionando com outros conceitos mediante situações-problemas.

Em suma, a TCC se caracteriza por ser uma proposta didática que visa à construção do saber escolar, propondo um repensar nas condições de aprendizagem conceitual a fim de torná-lo mais assimilável ao aluno. O estudo dessa teoria analisa as adaptações que o aluno realiza influenciado pelas situações que este vivencia dentro e fora do ambiente escolar.

1.3. O USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Nos últimos anos muitos estudos foram feitos acerca da exploração de aplicações tecnológicas computacionais no ensino da Matemática. Segundo Giraldo e Carvalho (2004) muitas das vezes era atribuído à máquina o sucesso ou o fracasso do experimento. Os autores entendem que a máquina por si só não soluciona todos os problemas inerentes à aprendizagem. Destacam também uma observação sobre o trabalho de Laudares & Lachini (2000) na qual relatam:

> “(...) o uso de tecnologia pode se constituir em uma importante alternativa para o modelo tradicional de aula de matemática. No entanto, (...) os autores afirmam que isso não depende do fato de usar computadores por si só: tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura investigatória por parte dos alunos e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las” (LAUDARES & LACHINI, 2000 *apud* HASCHE, 2004, p.10).

Nesse mesmo sentido, quanto à formação de professores, Belfort e Guimarães (1998) alertam sobre algumas falhas metodológicas por parte dos docentes ao analisar professores utilizando *softwares* de Geometria Dinâmica. Estes mesmos apontam para o fato dos professores não adotarem uma postura mais crítica diante dos resultados emitidos pela máquina.

Diante dessa realidade, necessita-se de uma formação docente que capacite professores capazes de saber criar tarefas dinamizadas com o auxílio desses *softwares*, possibilitando dessa maneira, assumir um papel de guia de aprendizagem de seus alunos.

1.3.1. A PRESENÇA DAS TIC´S NA ATUAL SOCIEDADE

Em nossa atual sociedade, a palavra de ordem é mudança. Meios de produção e serviços estão sofrendo profundas alterações, devido às transformações de paradigmas da produção em massa. Essas mudanças indicam alterações em quase todos os segmentos de nossa sociedade, afetando a maneira como pensamos e agimos. Como afirma Drucker (1998), durante todo o século XIX e a metade do século XX, era possível perceber que as tecnologias estranhas a uma indústria interferiam pouco sobre a mesma e quem já alertava, que quem conhece bem sua própria tecnologia prospera. O mesmo autor ainda afirma que essas mudanças são destacadas pela passagem para a sociedade do conhecimento onde alguns fatores tradicionais de produção como matéria prima, o trabalho e a capital terão papeis secundários.

Portanto, o conhecimento e suas formas de aquisição assumirão papel de destaque, ou seja, de primeiro plano. A valorização do conhecimento requer uma nova postura profissional, isto é, há de se rever os processos educacionais atuais, principalmente aqueles que estão diretamente relacionados com a formação de profissionais e com os processos de aprendizagem.

A mudança pedagógica que todos esperavam é uma migração de uma educação baseada na simples transmissão de informação e instrução para a criação de ambientes de aprendizagem na qual os alunos realizam atividades e constroem seu próprio conhecimento. Essas mudanças determinam profundas mudanças na escola de uma forma geral: na organização curricular, na sala de aula, no novo papel do professor e do aluno em relação à aquisição do conhecimento.

Tendo a educação que atuar sob um novo paradigma, isso implicará em professores mais bem capacitados não a inserir a informação ao aluno, mas para criar situações favoráveis em que o aluno "puxe" a informação. Mesmo assim, somente haver a informação não significa ter o conhecimento.

O conhecimento é fruto do processamento da informação aplicada na resolução de problemas do cotidiano. Isso exigirá do aluno a compreensão do que está realmente fazendo para tomar suas decisões, atuar e realizar tarefas. Por isso, a Educação não pode ser mais fundamentada em um fazer inconsequentemente e descompromissado, de se realizar determinadas tarefas e se chegar ao resultado do final do livro texto. Muito mais que o fazer é o compreender todo esse processo de aquisição do conhecimento.

> "(...) A escola pode se tornar o espaço onde os alunos e especialistas se encontram para esclarecer e digerir; refletir e depurar suas idéias. Deverá ser o espaço na nossa sociedade, no qual a informação adquirida das mais diferentes formas, meios e locais, poderá ser convertida em conhecimento" (Frase aferida por Paulo Freire no vídeo "O Futuro da Escola", 1996).

Segundo Hargreaves (1995), um dos maiores desafios da sociedade do conhecimento é implantar mudanças no ambiente escolar, adequando-o as atuais exigências, pois a escola é um espaço complexo de trabalho que envolve muitos outros fatores além do professor e aluno. De certo, grandes modificações no âmbito educacional dependem, fundamentalmente, do professor e aluno, porém, essas ações, para serem efetivadas, devem ser acompanhadas de uma maior autonomia ao tomar decisões, alterar o currículo, desenvolver uma proposta de trabalho em equipe e usar novas tecnologias da informação.

> "A forma empirista de pensar tem levado muitos professores a tratar o aluno como aquele que nada sabe, (...) enquanto ele, professor, é que já sabe o possuidor do saber. Assim, é o mestre que escolhe o que, como e quando ensinar" (AROEIRA, 1996, p. 27).

É preciso repensar o novo papel do professor, não apenas como relação ao comportamento perante a turma, mas em relação ao currículo e ao contexto escolar. Por isso, as mudanças na escola devem envolver todos – alunos, professores, diretores, especialistas e toda a comunidade de pais.

Nessas mudanças de contexto escolar, a informática deve assumir papéis fundamentais e transformadores. Deverá ser uma ferramenta que permite a comunicação de profissionais da escola, permitindo a presença virtual desse suporte na escola.

Somente a inclusão da informática na escola, o fato do aluno utilizar o computador na realização de suas tarefas não significa que ele compreenderá o que será feito, mas é uma grande indicação de mudança.

> “Não posso ser professor se não percebo cada vez melhor que, por não ser neutra, minha prática exige de mim uma definição. Uma tomada de posição. Decisão. Ruptura. Exige de mim que escolha entre isto e aquilo. Não posso ser professor a favor simplesmente do Homem ou da Humanidade, frase de uma vaguidade demasiado contrastante com a concretude da prática educativa” (FREIRE, 1996, p. 63).

Com tudo isso, é preciso que o professor seja valorizado e que tome a postura de facilitador da aprendizagem, não mais um mero transmissor de informações.

1.3.2. A INTERVENÇÃO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO

Nos últimos anos tem se discutido incessantemente o uso do computador na educação. Muitas escolas investem parte significativa de suas finanças em compras de equipamentos tecnológicos como microcomputadores, impressoras, *datashows*, entre outros. Entretanto, essa “inundação tecnológica” pouco contribui para a efetiva Educação se não houver um planejamento prévio e consistente de sua utilização como ferramenta de apoio ao ensino-aprendizado principalmente no que diz respeito a recursos humanos como professores e gestores.

A construção de um projeto deve considerar alguns aspectos para que haja unidade de propósitos, consistência nas ações, sentido comum nos esforços de cada um e resultados sistematizados. Embora cada projeto apresente particularidades e exija adaptações, as seguintes preocupações básicas devem ser consideradas na construção de um projeto (MEC, 2000):

- Identificação de um problema
- Levantamento de hipóteses e soluções
- Mapeamento do aporte científico necessário
- Seleção de parceiros
- Definição de um produto
- Documentação e registro
- Método de acompanhamento e avaliação
- Publicação e divulgação

Nas escolas da rede pública, a situação ainda é mais crítica. Ora devido às condições físicas adversas em que as escolas se encontram, ora pela falta de organização dos projetos políticos governamentais. Segundo Cysneiros (1996):

> “O conhecimento sobre preparação de pessoal e sobre os usos das novas tecnologias da informação na educação ainda é algo relativamente recente em nosso meio (de certo modo em todo o mundo), estando acumulado nas teses e nas publicações de pesquisadores universitários. Os cursos de formação ainda encontram-se numa situação experimental, os alunos sofrem as deficiências da falta de estruturas, de *software*, de literatura didática. Uma deformação comum, tecnocentrista, é a ênfase em disciplinas de cursos de informática (fora do contexto para o qual foram pensadas), que certamente terão pouca ou nenhuma utilidade para professores em geral e para os responsáveis pela informática educativa na Escola” (CYSNEIROS, 1996, p. 16).

A chegada dos computadores nas escolas vem causando grandes discussões por parte dos educadores, porém o que se pode observar é que na prática ainda há pouca utilização do computador na sala de aula. Levy (1996) diz que a informática é um campo de novas tecnologias intelectuais, aberto, conflituoso e parcialmente indeterminado. Embasado nessa afirmação, a utilização dessa ferramenta como um componente motivador do ensino, ocupa uma posição de destaque no contexto educacional, e por conta disso, é necessário uma reflexão criteriosa acerca das transformações inerentes a sua utilização, propondo assim, novos métodos de ensino.

Segundo Valente (1999), quando os professores são indagados sobre o verdadeiro uso do computador na Educação é bem comum ouvirmos respostas do gênero: “o computador motiva o aluno”; “é a ferramenta pedagógica do momento”. Vale à pena lembrar que graças ao computador, temos hoje bancos 24 horas, eletrodomésticos, etc. Estes são alguns dos diversos exemplos de como o computador interfere de forma positiva no nosso cotidiano. E por consequência, deveria facilitar a educação possibilitando ao professor propor mudanças pragmáticas com a finalidade de promover a aprendizagem significativa.

Ramal (2000) personaliza o professor do futuro. Ele acredita que o professor assumirá o papel de estrategista da aprendizagem. Alguém que conheça a psicologia e a ecologia cognitiva de seu aluno. Em outras palavras, o professor deverá saber como o aluno aprende, para assim, poder determinar soluções de aprendizagem no ambiente computacional.

O que podemos constatar, em nossa experiência acadêmica, são professores subutilizando os equipamentos tecnológicos, como exemplo, professores que preparam toda a sua aula no *PowerPoint*[1] e o projeta na parede com o *datashow* utilizando a tela do computador como quadro-negro mais moderno. A nosso ver, essa atitude é redundante em relação ao que já é realizado na sala de aula, pois qual a diferença, nesse caso, do quadro-negro e a projeção na parede? Ramal (2000 *apud* NASCIMENTO 2008, p. 05) diz que há duas maneiras de se usar o computador na sala dela aula, confirmando o que ponderamos:

> "uma é como se ela fosse um caderno mais prático, ou um quadro-negro mais moderno: por exemplo, colocar os alunos para copiar textos no *Word*, ou dar aula com apresentações no *Power Point*. Isso não é novidade, é apenas incrementar a aula tradicional com elementos atraentes. A segunda maneira é tornar o computador um novo ambiente cognitivo, ou seja, compreender que no contexto digital mudar as novas formas de pensar e, portanto, de aprender.
> Isso não é inédito na humanidade quando a escrita surgiu, o mundo começou a pensar diferente, a organizar as idéias de outro modo e a formar novas visões da realidade. Nossa época é tão decisiva na história como aquele momento cabeças deixam de ser analógicas para se tornar digitais" (RAMAL, 2000 *apud* NASCIMENTO, 2008, p.05).

As conquistas tecnológicas da humanidade ao longo de toda sua história como a invenção da escrita, os livros, rádio, telefone até os atuais microcomputadores possibilitam novas formas e situações de ensino aprendizagem. Com o avanço tecnológico propulsionando a evolução social, tornou-se necessário uma rápida modificação na Educação a fim de agregar o grande volume de conhecimento advindo das tecnologias em especial a *Internet*.

> "Os indivíduos da sociedade do século XXI necessitam não apenas de uma formação que os habilite a ler e escrever por meio de algarismos, mas também a compreender as formas de comunicação audiovisuais (adentrando na organização da técnica e da linguagem), assim como produzir sentidos por meio de imagens e sons. Se isso há bem pouco tempo poderia parecer uma utopia irrealizável, na medida em que a produção dos audiovisuais era propriedade acessível a poucos, hoje, como o processo de informatização dos mecanismos produtivos de cinema, do vídeo e das multimídias, podemos vislumbrar essa realidade como alcançável. É preciso, portanto, que os audiovisuais sejam incorporados na educação formal e não-formal do homem desse novo milênio" (NOVA e ALVES, 2003, p.115).

Conforme as considerações de Borges e Fontana (2003, p.01), "Na educação, a introdução das TIC nos ambientes escolares pode contribuir para repensá-lo e para a

---

[1] É um software que permite a criação de itens visivelmente impressionantes, como apresentações com texto, elementos gráficos, fotos, vídeo, animação entre outros. (http://office.microsoft.com/pt-br/powerpoint/). Acessado em: 12/01/2011.

reconstrução da prática educativa, modificando a concepção de educação, de professor, de aluno, de escola, de universidade, rompendo com o paradigma um-todos (centralizado no professor, como única fonte de informação e unidirecional), rumo ao paradigma todos-todos (prioriza a aprendizagem colaborativa, a interatividades, a produção do conhecimento e a comunicação multidirecional).”

Dentre as várias vantagens que as ferramentas tecnológicas oferecem, podemos destacar a dinamização de algumas técnicas de ensino tradicionais e ultrapassadas e a implementação de *softwares* matemáticos com a finalidade de propiciar aos alunos um melhor entendimento, possibilitando ainda sua interação com o conteúdo através do computador, deixando de exercer um papel estático e passivo e buscando assumir um papel de investigador e pesquisador, fator esse, primordial para o processo de ensino-aprendizagem.

Por conta disso, é necessária a capacitação dos professores para atuarem nesse meio tecnológico, de acordo com Ponte, Oliveira e Varandas (2003, p. 10), onde foram observados os resultados de uma disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática:

> “Os professores de matemática precisam saber usar na sua prática as ferramentas das tecnologias de informação e comunicação (TIC), incluindo *software* educacional próprio para a sua disciplina e *software* de uso geral (NCTM, 1994). Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. Além disso, permitem que o professor dê maior atenção ao desenvolvimento de capacidades de ordem superior, valorizando as possibilidades de realização, na sala de aula, de atividades e projetos de exploração, investigação e modelação. Desse modo, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como as atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência” (PONTE e VARANDAS, 2003, p. 10).

1.3.3. O COMPUTADOR NA SALA DE AULA: A VISÃO DO PROFESSOR

As TIC, em especial o computador, estão sendo utilizadas de várias maneiras na Educação. O que parece é que a forma como essas tecnologias são aplicadas na sala de aula pelos professores são influenciadas pelas suas concepções acerca de conteúdos da Matemática e sobre a sua metodologia de ensino-aprendizagem.

Conforme Canavarro (1993), as concepções do professores acerca da Matemática não são bem definidas, contudo, segundo estudos feitos por Ponte (1989) com alguns professores que participaram do Projeto Minerva[2], foi possível concluir que a grande maioria dos professores veem o computador como um instrumento para criar uma nova dinâmica dentro da sala de aula.

Outra pesquisa sobre os anseios dos professores em relação à inserção do computador na sala de aula foi realizada por uma equipe composta por 70 professores que atuaram no Projeto Minerva entre os anos de 1990/1991. Os resultados, segundo Canavarro (1993) mostraram que alguns professores consideram o computador como apenas mais um material de apoio ao ensino, mas a grande maioria atribui ao computador o poder de tornar o ensino mais efetivo. Com essa pesquisa, identificaram-se as seguintes concepções:

- O computador é visto como uma ferramenta motivacional, mediante o interesse dos alunos diante a sua utilização;
- O computador é visto como um fator de modernização da escola, valorizando a sua utilização no âmbito educacional, ocupando um lugar de destaque nos mais diversos domínios da atividade;
- O computador é visto como um elemento facilitador, ajudando nas resoluções de cálculos e gráficos;
- O computador é visto como um elemento de mudança, valorizando as possibilidades que este oferece para criar aulas dinâmicas e dos papeis do professor e dos alunos nesse processo de ensino-aprendizagem.

Canavarro (1993) acredita que o computador propicia um melhor ambiente dentro da sala de aula, motivando os alunos.

> "Esta concepção do computador como um elemento de animação não tem implicações diretas ao nível das atividades matemáticas nem das metodologias de trabalho. Caracteriza-se essencialmente por fazer o que já fazia antes mas de modo diferente, mais aliciante" (CANAVARRO, 1993. p. 36).

Ainda Canavarro (1993), afirma que outros professores acreditam que os computadores possibilitam que determinados tipos de atividades, consideradas de nível

[2] O Projeto Minerva, criado na década de 70, foi um programa que visava o atendimento supletivo aos egressos do MOBRAL (Movimento Brasileiro de Alfabetização) no sentido de garantir a formação das oito séries do primeiro grau (hoje ensino fundamental) com o objetivo de qualificar mão-de-obra para atender à crescente demanda de industrialização no país.

elevado, sejam realizados de forma mais simples. “Exemplos são atividades de experimentação, de exploração e investigação, formulação e testes de conjecturas, trabalhos de projeto, trabalhos com aplicações realísticas da matemática à realidade. Esta concepção do computador como um elemento de possibilidade caracteriza-se essencialmente por fazer novas coisas que anteriormente não eram feitas.”

A verdade é que de nada adianta discutir os benefícios e malefícios da utilização das TIC na sala de aula sem compreender sua utilização nesse meio. Segundo Ponte (2000, p. 88), “os problemas e os perigos são numerosos. Mas não há alternativa senão fazer-lhes face.” De forma imperceptível, o trabalho do professor sempre esteve envolvido com alguma espécie de tecnologia. Ainda Ponte (2000), muitas das vezes a palavra tecnologia é associada, de forma equivocada, ao conceito de equipamentos eletrônicos como computadores e audiovisuais.

É bom ressaltar que tecnologias (ou mídias) como o papel, a pena, a caneta e imprensa sempre mediaram a relação professor e aluno. De acordo com Levy (1996), a história da humanidade sempre esteve envolvida com a história das mídias. O autor utiliza o termo tecnologia da inteligência e dá destaque a três fases associadas à memória e ao conhecimento: a oralidade, a escrita e a informática.

> “(...) é uma nova extensão da memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma ‘nova linguagem’ que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea” (BORBA e PENTEADO, 2003, p. 48).

A Matemática, em nossa concepção, é a disciplina que mais causa dúvidas e como conseqüência disso, favorece o desinteresse desses alunos pela disciplina principalmente se não for ministrada com criatividade e aplicabilidade pelo docente, restando ao professor buscar novas alternativas de ensino, utilizando recursos didáticos mais estimulantes, evitando a rotina da lousa e giz.

> “O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem” (BRASIL, 2000a, P.15).

É de extrema importância e necessidade que o professor saiba a necessidade dos recursos audiovisuais como rádio, *TV* e computador na sala de aula. Os *softwares* matemáticos são recursos que muito podem favorecer o ensino-aprendizagem do aluno, pois além de desenvolver a autoconfiança no mesmo, ainda pode ajudá-lo a pensar, refletir e criar soluções para os problemas do cotidiano.

Segundo Fusari (1998), a escola é o local de tradição cultural onde a ampliação do conhecimento é estimulada e o aluno é o sujeito nesse processo de aprendizagem.

2. ENSINO DE FUNÇÕES

Braga (2006), logo na introdução de sua obra, enfatiza a importância do conceito de função no que tange a noção de variação, dependência funcional e, sobretudo, seu caráter integrador nos diversos ramos da Matemática, dessa com outras ciências e suas aplicações como uma real significação para os estudantes.

Como exemplo da grande importância das representações funcionais para a vida cotidiana moderna, tal tema passou a fazer parte dos critérios do alfabetismo matemático nas pesquisas Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF), realizado pelo instituto Paulo Montenegro e co-organizadas pela Organização Não Governamental (ONG) Ação Educativa com a consultoria da professora Maria da Conceição Fonseca da UFMG. O INAF revela os níveis de alfabetismo funcional da população brasileira adulta. Seu principal objetivo é o de fornecer informações qualificadas sobre as habilidades e práticas de leitura, escrita e matemática dos brasileiros entre 15 e 64 anos de idade objetivando promover o debate público, estimular iniciativas da sociedade civil, subsidiar a formulação de políticas públicas nas áreas de Educação e cultura, além de colaborar para o monitoramento do desempenho das mesmas.

Mais especificamente sobre o conteúdo funções, a pesquisa permite revelar o nível de compreensão acerca das representações funcionais tabular, gráfica e a familiarização do pesquisado com interpretações de tabelas e gráficos.

2.1. O ENSINO DE FUNÇÕES E SUA LEGISLAÇÃO

Nessa seção, analisaremos brevemente o conhecimento sobre o tópico funções, como parte do tema estruturador, no currículo da Educação brasileira, à luz dos PCN e do documento OCEM.

O Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999) enfatiza a necessária transformação no processo de ensino de nosso país, apresentando caminhos e propostas para melhorias no ensino-aprendizagem apregoando a necessidade de uma articulação lógica entre diferentes ideias a fim de proporcionar uma maior significação para a aprendizagem, possibilitando ao aluno estabelecer, conscientemente, uma relação no sentido de assimilar as competências da área.

A mesma legislação sugere também mudanças no paradigma educacional principalmente no que tange a fomentação do cidadão capaz de compreender o meio que o cerca e o saber viver coletivamente.

> "As escolhas que serão feitas devem ter no horizonte o aluno de cada escola, daí a necessidade de um olhar cuidadoso para esses jovens, indivíduos cognitivos, afetivos e sociais, que possuem projetos de vida, histórias pessoais e escolares. A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta" (BRASIL, 1999, p. 117).

A Matemática do ensino médio deve ser vista como ciência com todas suas especificidades dando ênfase a necessidade do aluno em compreender definições, demonstrações e encadeamentos lógicos com o intuito de fornecer ao mesmo, condições de construir novos conceitos e estruturas dando sentido às técnicas aplicadas.

É evidente a importância da compreensão do conceito e representações gráficas por parte do aluno, tal como sua aplicabilidade em outras ciências como Física, Química, Biologia entre outras. Outra razão, não menos relevante, é que esse tema é pré-requisito para as disciplinas de CDI em cursos de ciências exatas e vem se configurando, ao longo dos anos, e em praticamente todas as Instituições de Ensino Superior do país, como uma das disciplinas que mais reprova, causando assim uma enorme quantidade de alunos evadidos, obstruindo-os nas matrículas de determinados cursos por ser pré-requisito. Segundo Ferreira, Laurenti e Araújo (2004), estudos realizados pela Universidade Anhembi Morumbi, mostram que um número significativo de alunos são reprovados na disciplina de CDI e estes índices negativos são atribuídos aos seguintes fatores:

> - A reprovação do aluno se deve principalmente, porque o estudante, ao ingressar na Universidade, não tem o amadurecimento matemático necessário para obter a aprovação no curso de Cálculo, com o atual nível de exigência que é utilizado no curso. Ele traz consigo deficiências de formação matemática do segundo grau que se tornam difíceis de serem eliminadas na Universidade.
> - Os exames de vestibular não detectam em profundidade as fraquezas, em matemática, dos estudantes provenientes do 2º grau.
> - Há necessidade que a Instituição ofereça atividades complementares como o curso de Nivelamento no Ensino de Matemática.
> - Alunos, em sala de aula, com níveis de conhecimentos díspares, unindo grupos com alto índice de desenvolvimento e outros que não conseguem acompanhar a aprendizagem básica.
>
> (FERREIRA, LAURENTI e ARAÚJO, 2004, p. 2).

Essa situação vem se agravando devido às dificuldades de ensino-aprendizagem da Matemática nos diversos segmentos da Educação. Tal fato pode ser facilmente observado através dos resultados de algumas avaliações como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) e do Programa Internacional de Avaliação dos Alunos (PISA), todas sob a coordenação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Gomes, Lopes e Nieto (2005, p.7), ao se referirem ao aluno recém ingresso no curso superior, afirmam que "é certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamentais e médios, no entanto, esse aluno está chegando ao curso superior e nós professores universitários, não podemos enviá-los de volta".

No que se refere ao ensino de funções, que é o nosso objeto de estudo, o documento afirma que:

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática" (BRASIL, 1999, p.44).

O conceito de função é um importante conteúdo matemático, tanto quanto linguagem como na grande variedade de gráficos que observamos no dia a dia estampados em jornais e noticiários e em cálculos de cunho financeiro. Seu domínio permite ao aluno associar a linguagem algébrica à linguagem da ciência imprescindível para expressar uma relação entre as grandezas e a modelar situações-problemas.

Em relação ao PCNEM de Matemática (BRASIL, 2002), ele é dividido em três eixos denominados Eixos ou Temas Estruturadores: Álgebra: Números e Funções, Geometria e Medidas e Análise de Dados. Todos esses temas estruturadores são subdivididos em unidades temáticas que são parcelas autônomas de conhecimento específico que podem ser remodelados ou condicionados ao Projeto Pedagógico de cada escola, observando-se o espaço cultural e temporal de seus alunos.

O documento em estudo ainda reprova a forma tradicionalista e ineficiente com o qual ainda se ensina funções. O estudo dos números reais e de conjuntos tal como suas operações e relações são apresentadas geralmente como pré-requisito para o aprendizado de funções. A partir do momento em que a noção de função é introduzida, todo o percurso descrito acima é abandonado e, para o aprendizado de outros tipos de funções subsequentes, os conceitos inerentes a conjuntos e relações se tornam desnecessários. A partir disso, propõe-se uma relativização ou até mesmo a exclusão do formalismo exacerbado da definição de função, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares, concordando com o que dizem Gravina e Santarosa (1999) em relação ao modelo pedagógico e sua relação com o ensino aprendizagem da Matemática:

> "O processo de pesquisa vivenciado pelo matemático profissional evidencia a inadequabilidade de tal abordagem. Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos" (GRAVINA e SANTAROSA, 1999, p. 2).

O documento propõe ainda que se inicie diretamente o estudo de funções descrevendo situações de dependência entre duas grandezas, possibilitando ao aluno estudá-las a partir de situações contextualizadas descritas algébrica e graficamente. Nossa proposta é que esse enfoque seja em espiral, isto é, as situações-problemas devem ser aplicadas não apenas na parte final do conteúdo e sim durante todo o processo de ensino.

> "Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas" (BRASIL, 1999, p. 118).

O estudo das sequências é uma ótima oportunidade para aprofundar a ideia de funções. Segundo o documento, é preciso estabelecer uma conexão entre esses conteúdos. Através das progressões aritméticas e geométricas, podemos estabelecer relações com diversos tipos de gráficos tais como suas análises. O texto ainda afirma que:

> "O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo em que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações" (BRASIL, 2002, p.121).

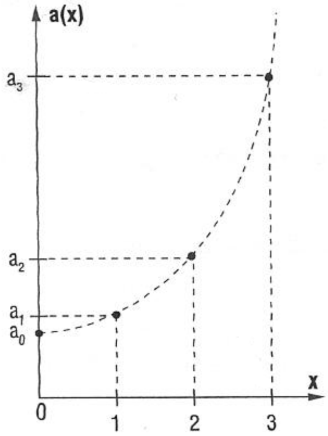
Um bom exemplo é citado no capítulo 3: Função Afim, no livro didático de Matemática Dante (2008. p. 57). Segundo o autor, há uma conexão muito importante entre a função afim e uma progressão aritmética.

> "Já vimos que uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada *razão* da progressão aritmética. Por exemplo, a sequência: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... é uma progressão aritmética de razão 3.
> Consideremos agora a função afim $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = 2x + 1$. Vamos constatar que: f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), f(19), ... é também uma progressão aritmética. Assim,
> $f(x) = 2x + 1$
> $f(1) = 3; \quad f(4) = 9; \quad f(7) = 15; \quad f(10) = 21;$
> $f(13) = 27; \quad f(16) = 33; \quad f(19) = 39; \quad etc.$
> Podemos observar que: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, ... é uma progressão aritmética e sua razão é 6 (2.3)" (DANTE, 2008, p. 57).

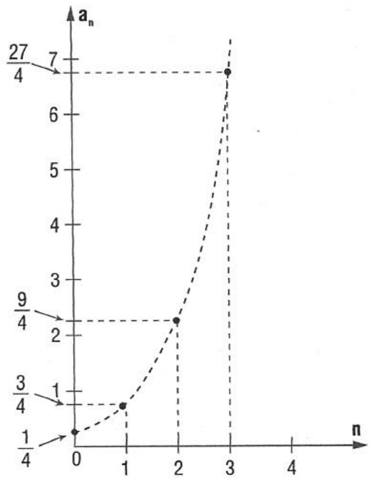
Ainda no livro de Dante (2008, p. 146): Ao apresentar a interpretação geométrica de uma progressão geométrica, ele correlaciona este conceito a uma função exponencial através de um exemplo e o representa graficamente.

> "Já vimos que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $a_n = a_1 . q^{n-1}$, ou por $a_n = a_0 . q^n$ quando começamos a enumeração dos termos por $\mathbf{a_0}$. Nesse caso, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural **n** o valor dado por $a_n = a_0 . q^n$. Essa função é a restrição aos números

naturais da função exponencial $a(x) = a_0 q^x$. O gráfico dessa função é formada por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



Veja o exemplo de $a_n = a_0 . q^n$, com $a_0 = \frac{1}{4}$ e $q = 3$ e o esboço do gráfico da função correspondente:
$PG\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, ...\right)$"



(DANTE, 2008, p. 146).

A OCEM apresenta um conjunto de reflexões acerca de questões relacionadas ao currículo escolar e a cada disciplina em particular. Além de aprofundar a compreensão sobre pontos que merecem maiores esclarecimentos, o documento aponta e desenvolve indicativos que podem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho, a fim de atender as necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o ensino médio, ressaltando também a real necessidade de adequação ao Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola.

Segundo Silva (2008), as OCEM diferem dos PCN quanto à forma como os temas a serem desenvolvidos são divididos. Nesse documento, os conteúdos básicos estão fragmentados em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade. Isso não significa que os conteúdos aqui devam ser trabalhados de forma estanque, pelo contrário, devem ser vistos de forma articulada entre si. Observa-se também nesse novo documento que o tema funções ganha um bloco próprio.

No que se diz respeito ao estudo de funções, o documento afirma "(...) Pode ser iniciado como uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância; tempo e crescimento; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outros" (BRASIL, 2006, p. 72). O documento ainda ressalta a conveniência em incentivar os alunos a expressarem as funções dadas de forma algébrica, verbalmente. Como exemplo, dada uma função $f(x) = 2x + 2$, que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de duas unidades. Dessa forma, podem facilitar o reconhecimento de outras funções em situações variadas como na cinemática, em Física.

A OCEM ainda destaca a importância do significado dos gráficos das funções e os diversos modelos a serem aplicados (afim, quadrático, exponencial e periódico) associados a diferentes áreas do saber tal como a identificação dos movimentos realizados pelo gráfico quando se alteram seus coeficientes.

> "Nesse trabalho, pretende-se então dar ênfase a uma metodologia que propicie ao aluno melhor observar essas transformações geométricas ocorridas nos gráficos. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc" (BRASIL, 2006, p. 72).

2.2. CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

O ensino médio tem como objetivo não somente uma complementação ou aprofundamento dos conceitos adquiridos no ensino fundamental, mas também a formação do cidadão apto a interagir em seu meio social, proporcionando-lhe formação ética, desenvolvimento da autonomia intelectual, entre outros aspectos. Conforme destaca o

PCNEM (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, a contextualização social.

Ao final do ensino médio, espera-se que o aluno tenha condições de solucionar problemas práticos do dia a dia; saiba modelar fenômeno em diversas áreas do conhecimento, sobretudo que entenda que a Matemática é uma ciência que se organiza via teoremas e demonstrações, e que ela é um conhecimento social e historicamente construído, mas inacabado.

O documento (BRASIL, 1999) destaca que o objetivo da Matemática no ensino médio não é apenas formativo, mas também deve ser visto como uma ciência, com características estruturais específicas, sobressaltando a necessidade de o aluno observar demonstrações, definições e encadeamentos conceituais e lógicos, objetivando a construção de novos conceitos a partir de outros com a finalidade de solucionar determinados problemas do cotidiano.

A Matemática é uma área do conhecimento que nos permite interagir com diversos aspectos de nosso meio. Um exemplo desses aspectos em conhecimento matemático é a busca e tratamento de informações. De uma maneira particular, esta atividade pode ser mediada com a utilização de recursos matemáticos como os gráficos, que é o tema norteador desse trabalho. Através das representações gráficas podemos sintetizar uma grande quantidade de informações de forma simbólica, isto é, não textual.

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, a Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao Ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática" (BRASIL, 1999, p. 44).

A representação gráfica é, na maioria das vezes, associada a uma organização de informações quantitativas inseridas em duas retas (ou eixos) ortogonais perpendiculares: uma reta horizontal (chamada de abscissa) e uma reta vertical (chamada de ordenada).

Ao se constituir como um instrumento cultural, consequentemente o gráfico passa a ser um conteúdo pertencente à grade curricular escolar. É importante observar que os gráficos nos permitem representar informações sobre inúmeros conteúdos, fato esse que amplia a sua importância no contexto escolar, uma vez que o assunto possa ser abordado interdisciplinarmente. Torna-se imprescindível a contextualização desse conteúdo, trazendo para o cotidiano, problemas que ilustrem fatos através de gráficos.

Os PCNEM (2002) fazem uma análise bem concisa da aplicação e das riquezas de problemas que servem para contextualizar funções e representações gráficas. A interpretação de gráficos vem sendo estudada detalhadamente por diversos pesquisadores no Brasil e em todo mundo. Abreu (2002 *apud* SILVA, 2008, p. 11), por exemplo, realizou pesquisas sobre álgebra mais especificamente sobre a aprendizagem da "Representação Gráfica e da leitura de gráficos" de funções de primeiro e segundo graus. A autora observou a dificuldade dos alunos para construção dos gráficos ao utilizarem os métodos tradicionais, porém, ao se utilizar ferramentas tecnológicas, pôde constatar que os alunos conseguiram visualizar o problema sob perspectivas diferentes.

Vergnaud (1988) ressalta os diferentes problemas conceituais que são levantados pela Álgebra os quais colaboram para as dificuldades cognitivas dos alunos. Segundo ele, alguns são: o significado do sinal de igual, operações simbólicas, os poderosos e difíceis conceitos de variável e função, o significado das soluções negativas e a manipulação de letras e a noção de sistema.

O estudo de função é muito complexo, causando dificuldades aos alunos, estudos de diversos pesquisadores têm mostrado que a análise dos elementos constitutivos das funções como raiz, domínio, contradomínio, imagem e sinais tem sido uma tarefa "dolorosa" para os estudantes. Outro fator que contribui para esse obstáculo epistemológico segundo Gaudêncio (2000) é a linguagem existente nos livros textos de Matemática do ensino médio devido à influência do Movimento da Matemática Moderna, com fundamentação na Teoria dos Conjuntos. Ainda há muitos livros que apresentam variações no conceito de função, o que dificulta ainda mais a sua compreensão por parte dos estudantes, como afirma Fossa e Fossa (2001).

> "(...) o aluno raramente desenvolve uma concepção desta noção que chega a aproximar sua plena generalidade. De fato, a definição do conceito de função parece ter um papel bastante reduzido na determinação de como este conceito é entendido pelo aluno. Muito mais importante é a sua experiência com dois conceitos associados ao de função, a saber, equações e gráficos, pois quando o aluno encontra funções no seu livro texto ou na sala de aula, geralmente se pede que

> ele manipule de alguma forma uma equação que representa a função ou esboce o seu gráfico.
> Assim, o aluno é exposto a uma classe restrita de funções e, forçosamente, ele abstrai o seu conceito de função apenas desta classe" (FOSSA e FOSSA, 2001, p.155).

Com a utilização de ferramentas tecnológicas, o professor pode criar diversas situações didáticas onde aluno é instigado a verificar suas conjecturas através investigações com o auxílio do computador, buscando as soluções para determinados problemas. Por exemplo, ao se ensinar funções, o professor pode propor constantes visitas ao laboratório de informática e propiciar dessa maneira, um momento de dinamismo e investigação a seus alunos, explorando o potencial das múltiplas representações que uma função pode representar.

> "Quanto ao potencial das múltiplas representações, considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função ou ainda, pode-se estudar famílias de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados" (GRAVINA E SANTAROSA, 1998, p. 11).

Santos (2002) em sua pesquisa procurou investigar a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da função afim $f(x) = ax + b$. O autor mostrou no decorrer da investigação as dificuldades dos alunos em relação à Álgebra e as representações gráficas das funções. Como proposta de melhoria da metodologia do ensino, ofereceu um *software* em formato de jogo. O jogo apresenta o gráfico e pede que o aluno descubra a sua expressão algébrica. É disponibilizado ao aluno dicas, porém, à medida que o aluno as utiliza, ele perde bônus. Quando terminam os bônus, o programa mostra a função procurada. Com isso, o aluno interage de forma direta com o conteúdo, e constrói o seu conhecimento. Através desse estudo levantaram-se algumas indagações, como: "A ferramenta informática pode propiciar um ambiente de aprendizagem propício para o aluno construir seu conhecimento?". "O uso de *software* do tipo jogo ajuda na aprendizagem dos conceitos matemáticos, de modo que esse conhecimento passe para um ambiente fora da sala de informática?".

Os resultados obtidos pelo autor foram considerados satisfatórios. O ambiente tecnológico favoreceu a experimentação e, por consequência, a aquisição de conhecimento.

Também, serviu como aliado ao educador na medida em que houve sucesso no processo ensino-aprendizagem.

3. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

3.1. DESCRIÇÃO DA PESQUISA

Este trabalho teve como fator motivacional as grandes dificuldades apresentadas pelos alunos do 3º período de Licenciatura em Matemática da FEAP concernentes aos esboços de gráficos de funções e suas aplicações no cotidiano. Tal deficiência tem sido observada nas aulas da disciplina CDI I, onde surge a necessidade de se construir gráficos de funções e analisar problemas dos quais envolvem tal conceito.

Para tentar amenizar a deficiência desses alunos quanto ao traçado de gráficos de funções, julgamos mais conveniente realizar essa abordagem utilizando as transformações geométricas no plano, não apenas por possibilitar uma visão mais geral dos pontos notáveis do gráfico e pela rapidez de sua construção, “mas também porque constitui um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço” (BASTOS, 2007, p. 23).

Conforme relata Gravina (1991), nos cursos de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS), os alunos ficam “presos” ao uso de tabelas para o traçado de determinados gráficos, perdendo dessa forma, a ideia mais ampla sobre o comportamento da função. A pesquisadora acrescenta ainda que com o uso das tabelas, priorizamos a marcação de pontos no plano cartesiano em detrimento do raciocínio, favorecendo a mecanização na resolução dos exercícios por parte dos alunos.

Durante o desenvolvimento do projeto, procuramos identificar cada aluno participante pela sigla ESM (Ensino Superior Matemática) acompanhado de um número que variou de 01 a 29. Exemplo: ESM01, ESM11, etc. Pudemos constatar, através do teste diagnóstico que, dos 29 alunos participantes da pesquisa, apenas 1 afirma ter conhecimento das transformações geométricas no plano aprendido quando cursava o ensino médio. Em relação à aplicação de funções no cotidiano, apenas 3 afirmaram que os professores de Matemática, na época em que cursavam o ensino médio, abordavam de forma constante o tema funções através de situações-problemas. O restante afirma que o professor utilizava esporadicamente os problemas de aplicação ou às vezes nem aplicava, limitando-se apenas ao ensino de técnicas operatórias.

Durante boa parte da aplicação do projeto, utilizamos o *Winplot* pelo seu potencial na visualização de gráficos de funções. O *Winplot* é um dos programas mais utilizados pelos professores no ensino da Matemática. Por ser gratuito, interativo, ocupar pouco espaço virtual em disco e possuir recursos de animação, optamos por aplicá-lo em nossa proposta de ensino.

Visando uma complementação das aulas presenciais relativas às transformações geométricas de gráficos de funções, fornecemos a cada aluno um CD, denominado de KVA, que é constituído de 7 vídeos-tutoriais elucidando passo a passo todo o procedimento para o traçado e análise de diversos gráficos de funções pelo *software* matemático *Winplot*.

Além dos vídeos, o CD ainda possui uma pasta contendo 6 *applets*[3], confeccionados pelo *software* matemático *Geogebra*[4], relativos à investigação de parâmetros de diversas funções e uma pasta de programas contendo os arquivos instaladores do *Winplot* e do *plugin*[5] *Java*, esse último essencial para o funcionamento dos *applets*. O KVA será mais detalhado no texto referente à descrição do produto. Vale ressaltar aqui que utilizamos o *software Geogebra* exclusivamente para a confecção dos *applets*, recursos esses não encontrados no *Winplot*.

Todos os alunos da turma participaram da pesquisa de forma voluntária. Vale frisar que, em nenhum momento do projeto, foi solicitado aos alunos que realizassem pesquisas ou estudos adicionais para realização dos testes destinados ao projeto.

Dividimos as intervenções em 3 etapas. Na primeira etapa, os alunos responderam a um questionário de forma individual e por escrito contendo 23 perguntas com a finalidade de diagnosticar o perfil sociocultural a fim de que pudéssemos traçar, de forma mais objetiva e clara, as sequências didáticas que permeariam nossas intervenções. Ainda como parte da primeira etapa, aplicamos o teste diagnóstico, forma individual e sem consulta, composto por 8 questões abertas que versavam sobre o tópico matemático funções (conceito, funções polinomiais do 1º e 2º graus, modular, exponencial, logarítmica) e situações-problemas onde buscávamos sondar o nível de compreensão dos mesmos no que se relaciona o traçado dos gráficos dessas funções e a capacidade de aplicabilidade das mesmas. Ao todo, foram utilizadas 6 aulas para a conclusão da primeira etapa.

No que se refere à segunda etapa, com base no perfil da turma e seu conhecimento prévio relativo ao tema abordado, foram elaborados planos de aulas sobre alguns tópicos de

---

[3] *Applets* são pequenas aplicações desenvolvidas em linguagem *Java* e que se podem incluir em páginas *HTML* de modo a serem utilizadas através de um browser. Estas aplicações não necessitam de instalação no computador e permitem manipular objetos ou obter algum resultado a partir da interação com essa aplicação.

[4] É um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. (http://www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra/geogebra.overview.html). Último acesso em: 20/02/2011

[5] Em informática, um *plugin* (também conhecido por *plug-in*, *add-in*, *add-on*) é um programa de computador usado para adicionar funções a outros programas maiores, provendo alguma funcionalidade especial ou muito específica. Geralmente pequeno e leve, é usado somente sob demanda. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Plugin) Último acesso em: 20/02/2011.

funções acrescidos de uma grande variedade de exercícios extraídos de alguns dos livros didáticos de Matemática mais adotados nas redes de ensino, além de frequentes idas ao laboratório de informática, propusemos atividades investigativas com o *software* matemático *Winplot*. Ao fim de cada intervenção, aplicamos um teste de verificação para mensurar o nível de compreensão dos alunos, que foram realizados de forma individual e sem consulta.

As atividades no laboratório de informática da instituição aconteceram, em horários extraclasses, estando os alunos dispostos em grupo, sendo permitida a consulta apenas aos componentes. O laboratório possuía, na ocasião, 10 microcomputadores, em perfeito estado de funcionamento, com o *software Winplot* devidamente instalado, fato esse que fez aumentar nossa motivação e a elaborar as atividades colaborativamente. A etapa 2 totalizou 38 aulas.

Por fim, na terceira e última etapa, aplicamos um teste final que objetivou a verificação do aprendizado, totalizando 3 aulas.

Foram necessárias, ao todo, 47 aulas (50 minutos cada) para a conclusão do projeto onde destas, 10 aconteceram em situação de sala de aula, isto é, durante as aulas de CDI. O restante se deu em horários extras, previamente agendados, porém dentro da própria instituição. Não foram computadas as atividades propostas para casa, como a utilização do KVA e situações-problemas extras.

Foram utilizados, em quase todas as etapas, como recursos tecnológicos, o *datashow*, o computador para a utilização do *software Winplot* e o KVA. Segue o quadro resumido (

Tabela 1) de todas as atividades ocorridas nas 3 etapas do projeto:

Tabela 1: Roteiro detalhado da pesquisa

ETAPAS	ATIVIDADES	Nº AULAS
Etapa 1	Teste diagnóstico	4
	Perfil do aluno	2
Etapa 2	Aulas expositivas sobre transformações geométricas em funções	2
	Aulas sobre transformações geométricas em funções afins	2
	Teste de verificação de aprendizagem sobre transformações geométricas em funções afins	2
	Aulas sobre transformações geométricas em funções quadráticas	4
	Teste de verificação de aprendizagem sobre transformações geométricas em funções quadráticas	2
	Aulas sobre aplicação de funções afins e quadráticas	4
	Teste de verificação de aprendizagem sobre aplicação de funções afins e quadráticas	2
	Aulas sobre transformações geométricas em funções modulares	2
	Teste de verificação de aprendizagem sobre transformações geométricas de funções modulares	2

	Aulas sobre transformações geométricas em funções exponenciais e aplicações no cotidiano	6
	Atividade investigativa sobre as funções $y = a^x$ e $y = b.2^{x+c} + d$ no laboratório de informática com o auxílio do *Winplot* e *applet*	3
	Aulas sobre transformações geométricas em funções logarítmicas e aplicação.	3
	Atividade investigativa sobre a função y = a.ln(x+b)+c no laboratório de informática com o auxílio do *Winplot* e *applet*	2
	Atividade investigativa sobre a função $y = a\sqrt{x+b} + c$ no laboratório de informática com o auxílio do *Winplot* e *applet*	2
Etapa 3	Teste Final	3
	TOTAL DE AULAS DO PROJETO	**47**

3.1.1. ETAPA 1

Nesta primeira fase, aplicamos um questionário (APÊNDICE A) contendo 23 perguntas objetivando levantar o perfil no que diz respeito ao histórico familiar e escolar dos 27 alunos do curso noturno de Licenciatura em Matemática. A aplicação do questionário aconteceu durante o período de aula regular. Foram necessárias 2 aulas para a realização dessa atividade.

Foi distribuída a folha de questionários aos estudantes presentes solicitando que respondessem de forma individual e, sobretudo procurassem justificar o máximo possível evitando deixar questões sem respostas. Mantivemo-nos presentes na sala a fim de solucionar possíveis dúvidas relativas ao procedimento da realização da atividade. Todos responderam com empenho havendo poucas solicitações de dúvidas.

A segunda fase da Etapa 1 consistiu na aplicação do teste diagnóstico (APÊNDICE B), também realizado individualmente e sem consulta a qualquer tipo de material didático, referente ao tema funções. O objetivo era averiguar o nível de compreensão dos alunos quanto ao tema no que se refere ao traçado do gráfico e a resolução de problemas. Para a realização do teste diagnóstico foram necessárias 4 aulas.

3.1.2. ETAPA 2

Com base nos dados colhidos na Etapa 1, relativos ao perfil do aluno e o teste diagnóstico, pudemos identificar e medir o nível de compreensão sobre funções. Vale ressaltar que em todas as aulas expositivas da Etapa 2, principalmente no que tange ao conteúdo funções, foram utilizados como recurso metodológico e tecnológico, o *software Winplot* e o KVA. Partimos então para a elaboração da intervenção e sua aplicação.

Nas duas primeiras aulas dessa etapa introduzimos aos alunos, com o auxílio do computador e o *datashow*, o conceito de transformações geométricas isométricas enfocando os movimentos de translação, rotação e reflexão também designados de movimentos rígidos. Exemplificamos esses movimentos rígidos através de algumas imagens animadas que simulam tais transformações. Ressaltamos o quanto tais conceitos influenciaram diversos artistas plásticos, arquitetos e decoradores como foi o caso de M. Escher[6] (1898-1972).

Nosso próximo passo foi associar as transformações geométricas isométricas com os gráficos de funções. Abordamos ainda o conceito de função par e ímpar bem como sua análise geométrica e analítica.

O encontro seguinte teve como objetivo explanar sobre as funções afins no que tange as transformações geométricas que ocorrem com essas funções. Nesse encontro, que teve a duração de 2 aulas, esboçamos os gráficos de algumas funções afins no quadro-negro. Apresentamos logo em seguida o *software Winplot*, elucidando algumas de suas potencialidades, principalmente no que se refere ao traçado de gráfico de funções. Ambos demonstraram grande entusiasmo diante da praticidade, dinamismo e interatividade apresentada pelo *software*. Em seguida, alguns dos alunos nos perguntaram quando teriam a oportunidade de manusear tal programa.

Para finalizar as aulas expositivas relativas às funções afins aplicamos, na etapa seguinte, com duração de 2 aulas, um teste de verificação constituída de 4 questões que objetivava medir o nível de compreensão dos mesmos quanto aos traçados dos gráficos mediante as transformações geométricas (APÊNDICE C). Solicitamos que a partir da função genérica ou básica $y = x$, traçassem outros gráficos pertencentes à mesma família de funções e descrevessem, com o máximo de detalhes, todos os movimentos ocorridos no plano e qualquer outra observação que julgassem convenientes destacar. Foi notória a grande dificuldade encontrada pelos participantes no momento da descrição. Um dos alunos chegou a relatar que não encontrava maiores dificuldades em compreender tais conceitos intrínsecos

[6] "Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nascido na Holanda, foi um dos artistas gráficos mais famosos do mundo e produziu mais de 2.500 desenhos e outras formas de arte que representam demonstrações do potencial artístico da Matemática. Jogando com simetrias, transformações e perspectivas, seus desenhos são intrigantes e maravilham o olhar humano, criando ilusões e um mundo fantástico de formas" (BROLEZZI, 2004, p. 11).

aos movimentos que ocorrem no gráfico, contudo, se sentia muito inseguro ao descrever tais acontecimentos.

Findada essas aulas, partimos para outra fase. Demos início às aulas relativas às transformações geométricas em funções quadráticas a partir da função básica $y = x^2$, que teve a duração de 4 aulas. Nas duas primeiras aulas, explanamos brevemente sobre funções quadráticas em sua forma geral $y = ax^2 + bx + c$, destacando seu domínio, imagem, concavidade, raízes, vértice e exemplificamos algumas situações-problemas em que tal conceito poderia ser aplicado de forma bem sucinta com o intuito de se fazer uma revisão do conteúdo. Em seguida, perguntamos a turma se já se depararam com uma função quadrática na forma canônica. Para nossa surpresa, nenhum dos alunos participantes conhecia tal forma. Partimos então para a conversão de várias funções quadráticas da forma geral para a forma canônica $y = a(x - x_1)^2 + x_2$, onde (x_1, x_2) são as coordenadas do vértice da função quadrática.

Planejávamos, a princípio, destinar tão somente 2 aulas para a explanação sobre as transformações geométricas ocorridas em funções quadráticas, estando estas na forma canônica. No entanto, sentimos a necessidade de dispormos de mais 2 aulas para a discussão desse tema, mediante solicitação de toda a turma, devido a grande dificuldade encontrada por eles em sua aplicação e a real importância do referido método para a compreensão dos movimentos que ocorrem nessas famílias de funções.

Nas 2 aulas seguintes, aplicamos um teste de verificação objetivando medir o nível de compreensão dos alunos no que se refere ao esboço de gráficos de funções quadráticas através de transformações geométricas e a capacidade de converter tais funções da forma geral para a forma canônica (APÊNDICE D).

No teste, distribuímos a cada aluno uma folha de ofício contendo apenas um enunciado propondo o esboço do gráfico de 4 funções quadráticas dadas na forma geral juntamente com uma folha quadriculada onde deveriam realizar o esboço desses gráficos. O aluno deveria, primeiramente, realizar a conversão da forma geral para a canônica, traçar seus respectivos gráficos a partir da função básica na folha quadriculada e em seguida descrever suas observações, destacando os movimentos intrínsecos a cada gráfico. Portanto, para essa intervenção totalizamos 6 aulas. Terminado a fase de intervenção sobre as transformações geométricas de funções afins e quadráticas, partimos para a aplicação de tais conteúdos através de problemas.

Nas 2 aulas iniciais, propusemos a solução de diversos problemas abrangendo conceitos de funções afins e quadráticas. O propósito aqui foi mostrar que o ensino-aprendizado de funções não se limitava apenas a técnicas operatórias onde se valoriza os cálculos, mas sim, em sua importância na modelagem matemática, assim como apregoa BUENO (2009).

> "Sob esse enfoque, o trabalho do professor consiste em contextualizar o conteúdo e propor uma situação de aprendizagem capaz de construir valores educativos, contribuindo para que o aluno elabore seus conhecimentos a partir de sua resposta pessoal às perguntas propostas. Sem a correlação entre o saber e a realidade, priorizando-se o contexto simplesmente matemático e fugindo-se dos campos de significados do estudante, torna-se improvável a construção do saber escolar e cria-se uma confusão entre esse e o saber científico" (BUENO, 2009, p. 37).

Ao todo, foram resolvidos 8 situações-problemas (APÊNDICE E) extraídos de alguns livros didáticos.

Mesmo não propondo exercícios, notamos que alguns alunos tiveram algumas dificuldades na compreensão da resolução de determinados problemas, principalmente na aplicação de máximos e mínimos que requer o conhecimento de funções quadráticas. Mediante a essa constatação, decidimos propor a resolução de mais 2 exercícios que envolvessem tais assuntos.

Com o propósito de medir o nível de compreensão dos alunos no que se refere à aplicação dos conceitos de funções afins e quadráticas, aplicamos um teste de verificação (APÊNDICE F), com duração de 2 aulas, que consistia em 4 situações-problemas retirados dos livros didáticos: foram 2 questões relativos a função afim e 2 sobre funções quadráticas. Nesta fase, onde trabalhamos as aplicações de funções afins e quadráticas mais o teste de verificação, totalizamos 6 aulas.

Nosso próximo foco foi o esboço de gráficos de funções modulares através transformações geométricas. Seguindo a mesma metodologia utilizada até o momento, esboçamos os gráficos de 4 funções a partir do gráfico da função básica $y = |x|$. Foram destinadas 2 aulas para a explanação sobre as transformações geométricas que ocorrem em tais funções. Finalizamos essa fase com a aplicação de um teste de verificação (APÊNDICE G) solicitando que traçassem os gráficos de 2 funções modulares através de transformações geométricas e relatassem, por escrito, os movimentos observados. Foram necessárias 4 aulas para a conclusão da intervenção inerentes ao tema transformações geométricas em funções modulares, onde não foram propostas situações-problemas.

Dando sequência as nossas intervenções, iniciamos nosso próximo encontro, com o objetivo de abordar o tema função exponencial no que se refere ao esboço e aplicações. Utilizamos 9 aulas, sendo que destas, 6 foram realizadas em sala de aula e 3 no laboratório de informática.

Calcados nos resultados coletados no teste diagnóstico destinado as análises de dados, percebemos uma acentuada deficiência dos alunos participantes no que diz respeito ao conhecimento sobre funções exponenciais, por isso decidimos iniciar nossa intervenção a partir da resolução de diversos exercícios de regras básicas de potenciação e soluções de equações exponenciais. Neste momento, os alunos apenas assistiram atentamente as explanações sendo permitido, contudo, que interpelassem quando quisessem.

Nas 2 primeiras aulas, realizamos uma breve revisão sobre o conteúdo potenciação para logo em seguida abordarmos as equações exponenciais. Pudemos observar que não houve grandes dúvidas quanto à compreensão das regras básicas de potenciação mesmo que seus resultados no teste diagnóstico nos levassem a pensar o contrário. Acreditamos então, que os erros cometidos foram erros causados por distração. Quanto aos exercícios sobre equações exponenciais, resolvemos 12 exercícios (APÊNDICE H) passo a passo, em ordem crescente de dificuldade. No final da aula, distribuímos a resolução detalhada de 7 equações exponenciais (APÊNDICE I). O objetivo era prepará-los para os exercícios de transformações geométricas em funções exponenciais e sua aplicação no cotidiano que estava por vir.

Seguindo a sequência de intervenção, iniciamos a aula sobre transformações geométricas em funções exponenciais a partir das funções básicas $y = 2^x$ e $y = \left(1/2\right)^x$. Determinamos diversos gráficos de funções geradas a partir dessas funções e analisamos seus pontos notáveis. Para isso, utilizamos o quadro-negro e o *softwar*e *Winplot*. Concluímos essa intervenção em 2 aulas.

As 2 aulas seguintes foram destinadas as resoluções de situações-problemas envolvendo o conceito de funções exponenciais. Distribuímos 5 problemas relativos ao tema abordado (APÊNDICE J) e, em seguida, apresentamos as resoluções, sanando eventuais dúvidas que surgiram. As principais dificuldades notadas foram principalmente em relação à resolução das equações exponenciais.

De acordo com o comportamento dos alunos em relação à resolução dos problemas concomitantemente aos seus interesses pelo assunto abordado, decidimos propor mais uma bateria de exercícios, que poderiam ser resolvidos em casa, com a promessa de repassá-los as resoluções no próximo encontro. Não cobramos a realização dessa atividade, apenas intencionamos uma complementação mediante as dificuldades apresentadas pelos mesmos.

Ao todo, computamos 6 intervenções dentro de sala de aula. Convidamos então a turma para realização de uma atividade, no próximo encontro, com duração de 3 aulas, ocorrido no laboratório de informática.

Em nosso primeiro encontro no laboratório, distribuímos 5 perguntas referentes ao comportamento da função exponencial $y = a^x$ (APÊNDICE K). Em seguida, os alunos deveriam abrir o *software* matemático *Winplot*, inserir a função citada, variar o valor da base "a", investigar as diversas famílias de funções surgidas e responder as perguntas. Entendemos que, a partir disso, o aluno foi capaz de esboçar uma grande diversidade de gráficos de funções exponenciais sem a necessidade de tabelas. Essa última atividade nos serviu como teste de verificação sobre funções exponenciais.

Logo após o teste de verificação, no mesmo dia, resolvemos aprofundar ainda mais sobre o assunto em questão, porém agora acrescentando outros parâmetros a função exponencial $y = a^x$. Propusemos que inserissem no *Winplot* a função $y = b.2^{x+c} + d$ e investigassem o comportamento dos gráficos obtidos quando variamos os parâmetros "b", "c" e "d" sempre correlacionando à função exponencial $y = 2^x$.

No nosso próximo encontro, abordamos o tema funções logarítmicas com duração de 2 aulas. Foi apresentada, através de slides, uma pequena introdução desse conteúdo enfatizando a sua importância não apenas como integrante do currículo escolar, mas também como um conceito que pode ser realmente aplicado não apenas na Matemática, mas em diversas outras áreas do conhecimento como na Física, Química, Biologia, Geografia entre outras. Entendemos que o estudo dos logaritmos não deva ser um fim por si mesmo, mas ser útil na aplicação de situações-problemas.

> "Acreditamos que se o aluno tiver realmente a possibilidade de interagir com o conteúdo "logaritmo" através de situações significativas, teremos criado um ambiente favorável para a formação de seu conceito e ele, consequentemente, não apresentará maiores dificuldades em aprender toda a gama de teoria e procedimentos relacionados a esse tópico (como por exemplo as propriedades, o estudo da função logarítmica, as equações e inequações). Deve ficar claro que "interagir com o conceito inicial de logaritmo" não significa memorizar a definição e calcular mecanicamente logaritmos de certos números, mas sim entender o significado de logaritmo, ter em mente a necessidade de seu estudo, bem como saber justificar as

> características e as condições de existência inerentes a esse conceito" (KARRER, 1999, p. 47).

Em seguida, em virtude do baixo rendimento obtido pelos alunos no teste diagnóstico, mais especificamente nos exercícios relativos a logaritmos, propusemos alguns exercícios sobre logaritmos como propriedades operatórias e equações que seriam de fundamental valia principalmente na resolução de situações-problemas envolvendo este tópico matemático.

Logo em seguida, com o auxílio do computador, esboçamos no *software Winplot* a função $y = \ln x$ que é uma função logarítmica neperiana ou natural por ter como base a constante "e". A ideia foi fixar o gráfico na área de trabalho do *Winplot* para servir como referência, isto é, como ponto de partida. Inserimos em seguida várias outras funções a partir da função básica a fim de que os alunos pudessem perceber e compreender as transformações geométricas ocorridas. A fase de apresentação do tema logaritmos bem como a abordagem de suas propriedades, técnicas operatórias e transformações geométricas foram abordadas em 3 aulas.

Após um breve resumo e análises gráficas das famílias de algumas funções logarítmicas, propomos aos alunos para que atentassem a resolução de alguns problemas de aplicação. Apresentamos então 3 situações-problemas e iniciamos suas resoluções. Em seguida, distribuímos 4 problemas (APÊNDICE L) que envolviam o conceito de logaritmo. Os alunos resolveram essa atividade complementar de forma individual e sem consulta, na qual procuramos intervir o mínimo possível.

Concluímos essa abordagem com a proposta de uma atividade investigativa no laboratório de informática, com duração de 2 aulas, que também nos serviu para medir o nível de evolução dos alunos em relação ao tema. Distribuímos 5 perguntas relativas ao comportamento da função y = a.ln(x+b)+c (APÊNDICE M) propondo a variação dos parâmetros "a", "b" e "c", tendo como ponto de referência a função y = lnx. A ideia central dessa dinâmica foi possibilitar a percepção dos movimentos ocorridos à medida que atribuímos e variamos os valores de tais parâmetros.

A etapa 2 foi concluída com a abordagem do tema função raiz quadrada. Em sua intervenção, não realizamos aulas teóricas a fim de elucidar o tema nem tão pouco propomos atividades que o envolvesse em situações-problemas. Optamos, tão somente, em realizar uma única atividade investigativa da função $y = a\sqrt{x+b} + c$ (APÊNDICE N) com o *software Winplot*, da mesma forma como já vinha acontecendo, com duração de 2 aulas, no laboratório de informática.

Distribuímos 5 questões que versavam sobre os movimentos ocorridos na função $y = a\sqrt{x+b} + c$ ao variarmos os parâmetros “a”, “b” e “c” a partir da função básica $y = \sqrt{x}$. Utilizamos essa atividade para mensurar o nível de compreensão dos alunos quanto às transformações geométricas em funções raiz quadrada.

3.1.3. ETAPA 3

Nossa intervenção foi concluída com a etapa 3 que teve a duração de 3 aulas, onde aplicamos um teste final composto por 6 questões (APÊNDICE O), realizada individualmente e sem consulta a qualquer tipo de material didático.

As questões escolhidas para o teste final foram as mesmas aplicadas no teste diagnóstico, excetuando-se as questões 2 e 3 (APÊNDICE B). O motivo de tal escolha se deu pelo fato dos alunos, no período em que realizaram o teste diagnóstico, não tiveram ciência de seus resultados nem tão pouco, puderam rever os enunciados do teste. Juntamos a isso, o longo espaço temporal compreendido entre o teste diagnóstico e o teste final e o baixo desempenho nas questões 1, 4, 5. 6, 7 e 8. Além desses fatores, julgamos que, reaplicando as mesmas questões, poderíamos realizar uma medição mais próxima da realidade, pois estaríamos utilizando a mesma “ferramenta de medição”. As questões 2 e 3 foram excluídas do teste final pelo fato dos alunos terem obtido um resultado satisfatório.

3.2. SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa de campo foi realizada com uma turma de 3º período de Licenciatura em Matemática, período noturno, da FEAP, composta, a princípio, por 29 alunos, sendo que 2 destes abandonaram o curso durante o desenvolvimento do projeto.

A escolha da turma para a realização do estudo de caso se deu pelo baixo rendimento apresentado na disciplina de CDI I, principalmente no que tange ao tópico matemático funções mais especificamente nos esboços e análises de gráficos. Somamos a esse fator, o grande entusiasmo destes alunos pela proposta do projeto por nós apresentados, fator esse que nos estimulou ainda mais a promover tais intervenções junto à turma.

Através da aplicação do questionário sociocultural (APÊNDICE A), pudemos traçar o perfil dos alunos participantes. A turma é predominantemente do sexo feminino, jovens na faixa etária de 20 a 30 anos, residentes em sua grande maioria em cidades vizinhas distantes, pelo menos, 20 km da cidade onde se localiza a faculdade. Trabalham no período do dia e se deslocam a faculdade no período noturno para assistirem as aulas. Conjecturamos ser este um dos motivos primordiais que justificam as poucas horas semanais dedicadas aos estudos extraclasses, conforme podemos atestar na Tabela 2.

Tabela 2: Horas de estudos extraclasses

Horas de estudos semanais	Alunos	Porcentagem
2 a 4 horas	23	85,2%
5 a 7 horas	03	11,1%
Mais de 7 horas	01	3,7%

Constatamos também o baixo nível de escolaridade dos pais dos estudantes. Verificam-se mais detalhadamente os dados da pesquisa nas Tabela 3 e Tabela 4.

Tabela 3: Escolaridade da mãe

Nível de Escolaridade da Mãe	Alunos	Porcentagem
Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever.	01	3,7%
Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever.	01	3,7%
1ª a 4ª série (completo)	05	18,5%
1ª a 4ª série (incompleto)	00	0%
5ª a 8ª série (completo)	06	22,2%
5ª a 8ª série (incompleto)	04	14,8%
Ensino Médio (completo)	08	29,7%
Ensino Médio (incompleto)	01	3,7%
Ensino Superior (completo)	00	0%
Ensino Superior (incompleto)	01	3,7%
Desconhece a informação	00	0%

Tabela 4: Escolaridade do pai

Nível de Escolaridade do Pai	Alunos	Porcentagem
Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever.	01	3,7%
Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever.	00	0%
1ª a 4ª série (completo)	04	14,8%
1ª a 4ª série (incompleto)	06	22,2%

5ª a 8ª série (completo)	04	14,8%
5ª a 8ª série (incompleto)	05	18,6%
Ensino Médio (completo)	02	7,4%
Ensino Médio (incompleto)	01	3,7%
Ensino Superior (completo)	01	3,7%
Ensino Superior (incompleto)	00	0%
Desconhece a informação	03	11,1%

O magistério, técnico, e em sua grande maioria, o ensino médio foram os cursos concluídos pela turma. Apenas um dos pesquisados concluiu dois desses cursos supracitados. Vale ressaltar que todos estudaram em escolas públicas municipais e estaduais. O período que se estendeu entre a conclusão do ensino médio e o ingresso no curso superior foi considerado curto, como podemos observar na Tabela 5 inerente ao ano de conclusão do curso de ensino médio.

Tabela 5: Ano de conclusão do ensino médio

Período (ano)	Alunos	Porcentagem
até 1998	4	14,3%
de 1999 a 2003	3	10,7%
de 2004 a 2008	21	75%

No que se refere à qualidade e metodologia do ensino da disciplina de Matemática no ensino médio, a maioria dos pesquisados classificou como sendo regular ou boa e a metodologia utilizada pelo professor se limitava, na maioria das vezes, as aulas expositivas com o quadro-negro e giz. Afirmou também que os professores de Matemática nunca utilizaram *softwares* matemáticos como recurso metodológico em suas aulas. Dentre os pontos negativos descritos pelos participantes quanto à disciplina de Matemática na educação básica, destacamos:

- A ausência ou fraca abordagem dos conteúdos intrínsecos as geometrias;
- Os participantes que concluíram os cursos de magistérios ou projetos como EJA (Ensino de Jovens e Adultos) alegam que os conteúdos de matemática ministrados são extremamente superficiais;

- Os conteúdos disciplinares são abordados com muita superficialidade ou às vezes omitidos nos cursos noturnos;
- Trocas constantes de professores;
- A ementa do curso não foi toda contemplada.

Dentre os poucos pontos positivos relatados pelos participantes, destaca-se o comprometimento dos professores quanto ao ensino de qualidade.

A Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5 e Figura 6 trazem os comentários de alguns alunos a respeito do ensino da disciplina Matemática no ensino médio:

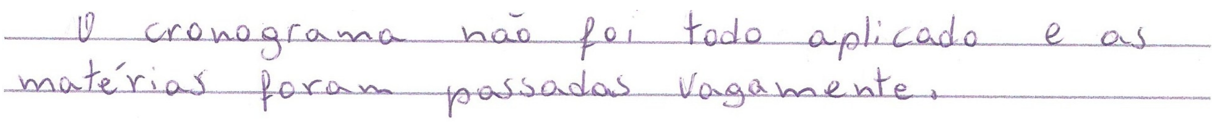

O cronograma não foi todo aplicado e as matérias foram passadas vagamente.

Figura 2: Comentário do aluno ESM02 sobre as aulas de matemática na época do ensino médio

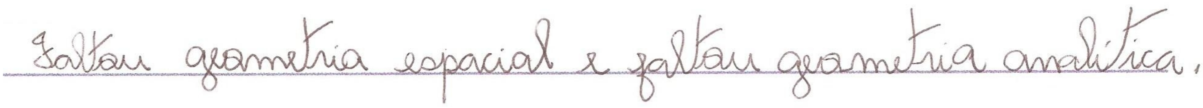

Faltou geometria espacial e faltou geometria analítica.

Figura 3: Comentário do aluno ESM03 sobre as aulas de matemática na época do ensino médio

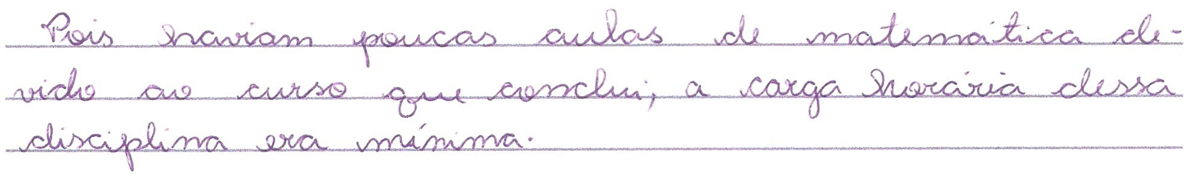

Pois haviam poucas aulas de matemática devido ao curso que conclui, a carga horária dessa disciplina era mínima.

Figura 4: Comentário do aluno ESM06 sobre as aulas de matemática na época do ensino médio

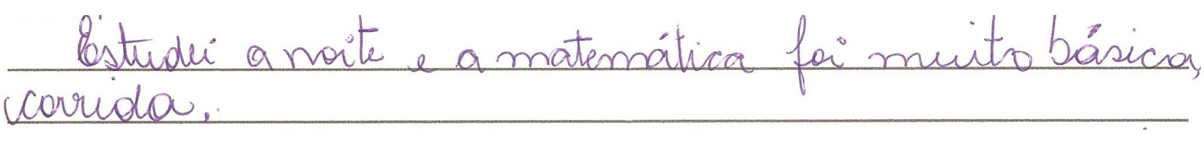

Estudei a noite e a matemática foi muito básica, corrida.

Figura 5: Comentário do aluno ESM09 sobre as aulas de matemática na época do ensino médio

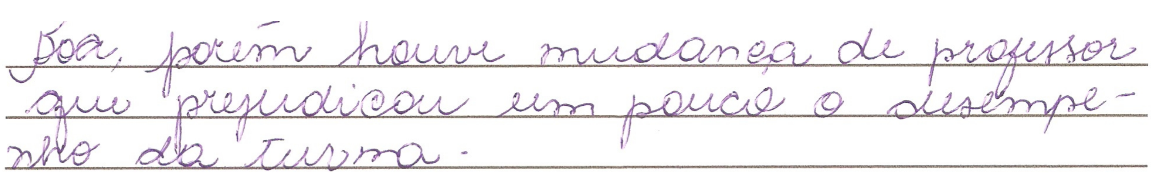

Boa, porém houve mudança de professor que prejudicou um pouco o desempenho da turma.

Figura 6: Comentário do aluno ESM26 sobre as aulas de matemática na época do ensino médio

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo descrevemos as intervenções pedagógicas realizadas com os alunos do 3º período de Matemática durante todo o desenvolvimento do projeto, procurando relatar e analisar os diversos tipos de erros cometidos por eles durante o 2º semestre de 2010. Os números de alunos que realizaram as atividades variaram entre 23 e 27 alunos. Apenas o teste diagnóstico foi realizado por 29 alunos. Logo em seguida, a turma teve 2 evasões.

4.1. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DIAGNÓSTICO

O teste diagnóstico (APÊNDICE B) foi a primeira atividade aplicada na turma. Composta de 8 questões que objetivava diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre o conceito de função e suas diversas formas de representação, identificação geométrica de uma função, traçado dos gráficos das funções afins, quadráticas, modular e exponencial; e resolução de situações-problemas inerentes a função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Esta atividade teve a participação de 29 alunos.

A primeira pergunta buscava investigar o conceito da definição que o aluno trazia consigo sobre funções tal como entes matemáticos associados a estes. Nosso objetivo com o questionamento foi fazer uma análise preliminar das definições de funções dadas pelos alunos nesse teste e compará-los ao teste final, quando foram, novamente, questionados sobre a definição de funções.

É evidente que o conceito de função é de suma importância e que a dificuldade dos alunos no que se refere a este conteúdo repercute negativa e diretamente na aprendizagem do CDI. Isso fica mais evidenciado devido ao grande número de evasão e reprovação nessa disciplina como elucida Silva (2002) quando afirma que, de acordo com sua experiência docente concomitantemente a sua pesquisa, o motivo do grande número de evadidos ou reprovados se dá pelo desconhecimento de elementos fundamentais da Matemática dentre eles as funções. Segue a Tabela 6 contendo os elementos associados à função mencionados pelos alunos.

Tabela 6: Elementos associados à função respondidos pelos alunos

Elementos associados	Alunos	Porcentagem
Relação	08	27,6%
Equação	05	17,3%
Conjunto	02	6,9%
Domínio e Imagem	04	13,8%
Outros	07	24,1%
Branco	01	3,4%
Não sabem	02	6,9%

Notamos uma grande dificuldade dos alunos em conceituar a definição de função. Muitos alegaram não se lembrar da definição formal. Solicitamos para que não deixassem a questão em branco, procurando relatar toda e qualquer informação que tivessem a respeito de seu conceito.

Nossa própria prática docente juntamente as diversas pesquisas na Educação Matemática tem mostrado que grande parte dos alunos, conforme elucida Chaves e Carvalho (2004) perfazem o percurso escolar do 1º ano do ensino médio até o ensino superior sem atribuir qualquer significado ao conceito de funções. Vale ressaltar que em nenhum momento do projeto, definimos formalmente funções. Queríamos, tão somente, medir o quanto a aplicação dessa intervenção contribuiu para a formação desse conceito. Seguem dois exemplos de definições (Figura 7 e Figura 8) onde os alunos associaram o conceito de função com equação e relação.

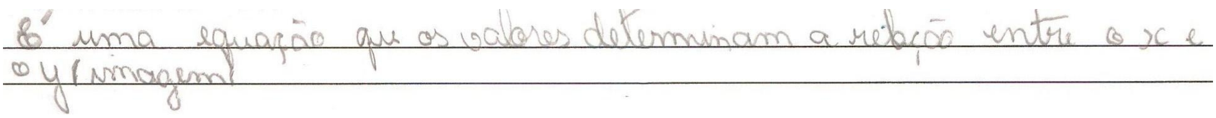

É uma equação que os valores determinam a relação entre o x e o y (imagem)

Figura 7: Exemplo 1 de definição associando o conceito função à equação

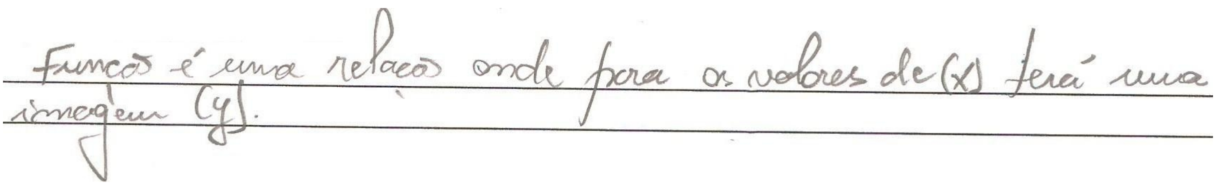

Funcõ é uma relacõ onde para os valores de (x) terá uma imagem (y).

Figura 8: Exemplo 2 de definição associando o conceito função à relação

Os participantes ESM09 e ESM17 (Figura 9) ao mencionarem o termo "expressão" em suas respostas, demonstraram não compreenderem a distinção entre expressão e equação.

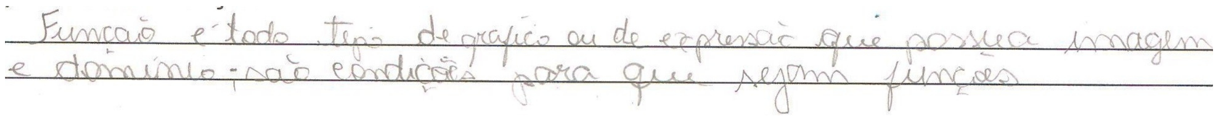

Função é todo tipo de grafico ou de expressão que possua imagem e dominio - são condições para que sejam funções

Figura 9: Definição de função feito pelo aluno ESM17

A questão 2 buscou investigar as diversas formas de representações conhecidas pela turma no que se refere as funções. Obtivemos um resultado que julgamos ser satisfatório, como podemos verificar na Tabela 7.

Tabela 7: Resultado da questão 2 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	24	82,7%
Parcialmente correto	04	13,8%
Errado (completamente)	00	0%
Branco	01	3,5%

Segue algumas observações relativos ao desempenho dos alunos na questão 2:

- Os participantes ESM25, ESM04, ESM28, ESM20, ESM24, ESM21, ESM06, ESM03 e ESM05, indicaram corretamente as funções das quatro maneiras distintas conforme proposto no enunciado. No entanto, ao representarem os diagramas de Venn e o plano cartesiano, não especificaram o domínio e o contradomínio.
- O aluno ESM07 representou a função em forma de tabela, diagrama de Venn e gráfico, mas admitiu não saber representar uma função através de fórmula. Curiosamente, este aluno adicionou uma fórmula na tabela, no diagrama e no gráfico. Entendemos que o aluno não compreende o significado de lei de associação.
- O participante ESM21 representou graficamente a função quadrática $f(x) = x^2 + 1$ com um aspecto "ondulado" não se caracterizando uma parábola. Isso se deu provavelmente pela falta de cuidado quanto à padronização da escala adotada nos eixos ortogonais. Além disso, o participante em questão não fez menção ao conjunto se é "x" ou "y". Sua resposta foi considerada parcialmente correta.

- O participante ESM01 equivocou-se ao representar uma função graficamente (Figura 10). Há infinitos valores de x em seu domínio que possuem duas imagens. Esse mesmo participante também não especificou os conjuntos ao representar a função através de diagramas.

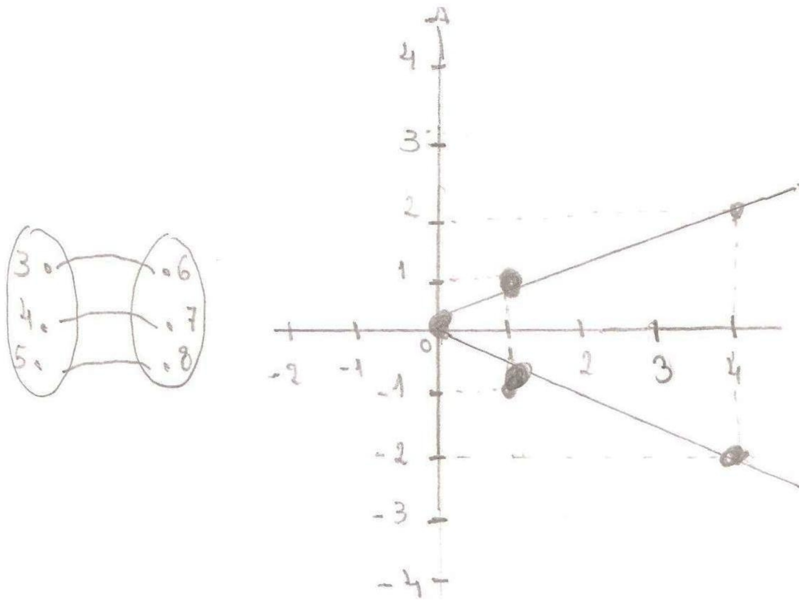


Figura 10: Equívocos do aluno ESM01

A questão 3 do teste diagnóstico objetivava verificar se os alunos participantes sabiam identificar graficamente uma função. O enunciado pedia para que o aluno marcasse, dentre quatro gráficos representando uma relação, as que representavam uma função. Pedimos também, para que justificassem suas escolhas. Os resultados podem ser visualizados na Tabela 8.

Tabela 8: Resultado da questão 3 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Acertou todas e justificou corretamente	03	10,3%
Acertou todas, mas não justificou corretamente ou não justificou.	11	38%
Acertou uma e justificou corretamente.	01	3,4%
Acertou uma, mas não justificou corretamente.	13	44,9%
Errou todas e justificou equivocadamente.	01	3,4%
Branco	00	0%

Segue algumas observações relativas à resolução da questão 3:

- O participante ESM21 marcou as opções corretas, mas cometeu um equívoco em sua justificativa. Segue: *“Os gráficos assinalados possuem, para cada valor de x, um valor em y”*.
- O aluno ESM15 representou corretamente, mas consideramos sua justificativa parcialmente correta na medida em que restringe o domínio ao conjunto dos números naturais (Figura 11).

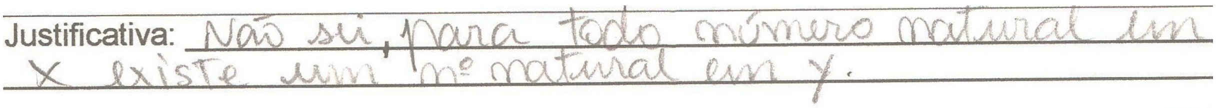

Justificativa: Não sei, para todo número natural em x existe um nº natural em y.

Figura 11: Justificativa do aluno ESM15 referente à questão 3 do teste diagnóstico

A questão 4 objetivou investigar a capacidade dos alunos em aplicar, através de situações-problemas, o conceito de função afim buscando verificar se os mesmos conheciam a relação entre as variáveis “x” e “y”, bem como o esboço do gráfico da função quadrática limitada por um intervalo (Tabela 9).

Tabela 9: Resultado da questão 4 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Acertou todas as letras	07	24,1%
Acertou apenas as letras a e b	07	24,1%
Acertou apenas as letras a e c	00	0%
Acertou apenas as letras b e c	00	0%
Acertou apenas a letra a	10	34,5%
Acertou apenas a letra b	00	0%
Acertou apenas a letra c	00	0%
Errou todas as letras	05	17,3%
Branco	00	0%

Dos alunos participantes analisados, constatamos que todos os que acertaram as letras “a”, e “b”, acertaram também a letra “c”. O erro mais freqüente observado por nós se deu nas operações de frações, como fica evidente na Figura 12.

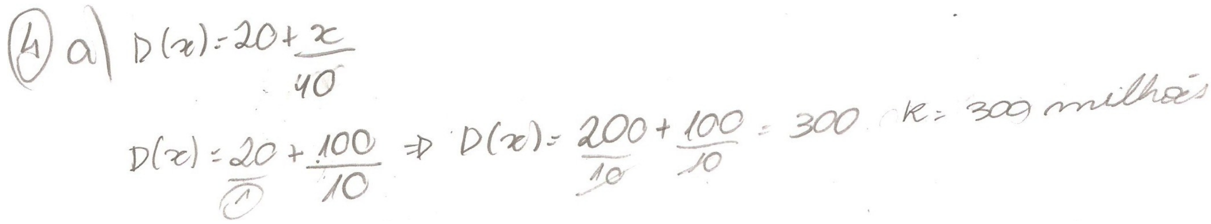


Figura 12: Equívoco ao operar com frações

Dos 14 alunos que acertaram a letra “b”, 13 alunos confundiram-se com a padronização da escala na grandeza “despesa em milhões de reais”. Isso aconteceu, muito provavelmente, por equívoco de interpretação, como ilustra a Figura 13.

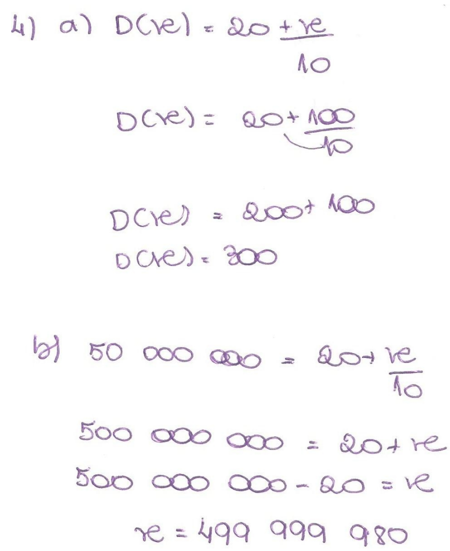


Figura 13: Desenvolvimento equivocado do aluno ESM10

Procuramos observar na questão 5, a habilidade desses alunos quanto a aplicação dos conceitos intrínsecos a função quadrática através de situações-problemas (Tabela 10).

Juntamente com a análise dos dados quantitativos, buscamos averiguar as técnicas utilizadas pela turma na resolução do problema (Tabela 11).

Tabela 10: Resultado da questão 5 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Acertou todas as letras	08	27,6%
Acertou apenas a letra a	02	6,9%
Acertou apenas a letra b	00	0%
Errou todas as letras	07	24,1%
Branco	12	41,4%

Tabela 11: Técnica aplicada na resolução da questão 5 do teste diagnóstico

Técnica de Resolução Aplicada	Alunos	Porcentagem
Apenas o gráfico	03	20,1%
Apenas a fórmula	06	40%
Apenas a tabela	01	6,6%
Gráfico e fórmula	03	20,1%
Tabela e gráfico	01	6,6%
Fórmula, gráfico e tabela	01	6,6%

Seguem algumas observações:

- Os participantes ESM17 e ESM27 usaram diretamente a fórmula do vértice, mas esboçaram equivocadamente o gráfico, como podemos observar nas Figura 14 e Figura 15.

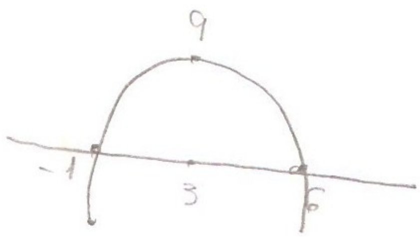


Figura 14: Esboço equivocado do gráfico da função quadrática pelo aluno ESM17

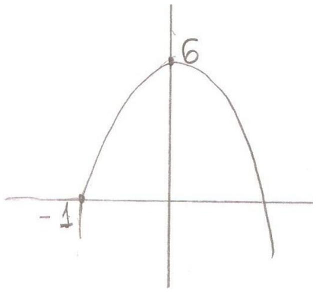


Figura 15: Esboço equivocado do gráfico da função quadrática pelo aluno ESM27

- O participante ESM23 esboçou o gráfico equivocadamente. Mesmo explicitando as repostas corretas não ficou clara a técnica utilizada para se chegar ao resultado.
- O aluno ESM09 afirmou compreender o desenho, mas não conseguiu representá-lo.

A questão 6 versou sobre os traçados dos gráficos das funções modulares, afins, quadráticas e exponenciais. Buscamos averiguar o nível de compreensão dos alunos participantes quanto ao esboço desses gráficos bem como a técnica adotada pelos alunos. Não impomos nenhum método ou técnica para o traçado desses gráficos.

Na letra “a”, pedimos para que esboçassem o gráfico da função modular $f(x) = -|2x-6|$. O resultado obtido foi insatisfatório (Tabela 12). Esse fato não nos surpreendeu, pois já tínhamos a consciência de que todos desconheciam a técnica de transformações geométricas, método esse aplicado com mais frequência na resolução desse tipo de exercício.

Tabela 12: Resultado da letra a inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	04	13,8%
Errado	19	65,5%
Branco	06	20,7%

Dos 23 alunos que realizaram as questões (independente de estarem corretas ou não) constatamos que 20 recorreram ao uso tabela para determinar as coordenadas e, através da junção deste, traçar o gráfico e 3 alunos o fizeram pelo método das transformações geométricas. Segue algumas observações relativas ao traçado do gráfico da função modular:

- O aluno ESM01 utilizou tabela, atribuiu os valores inteiros {-2, -1, 0, 1 e 2} ao “x” da função e encontrou uma única reta, associando a função modular ao gráfico de uma função afim (Figura 16).

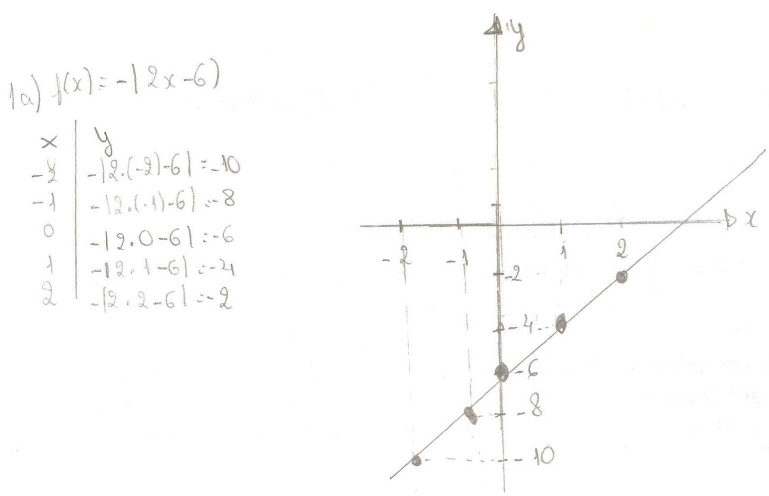


Figura 16: Esboço equivocado do gráfico da função modular pelo aluno ESM01

- Os alunos ESM15 (Figura 17) e ESM20 acertaram a questão. Realizaram o traçado da função aplicando conhecimentos de transformações geométricas. Não utilizaram tabela.

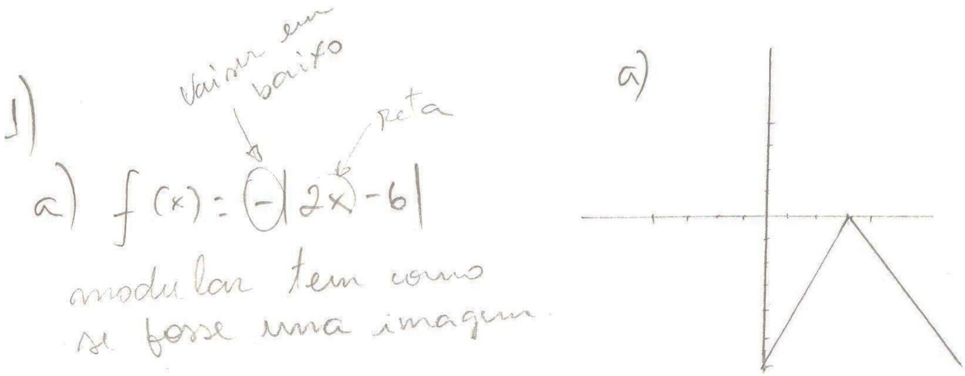


Figura 17: Esboço correto do gráfico da função quadrática pelo aluno ESM15

- O aluno ESM24 esboçou o gráfico equivocadamente. Aplicou a reflexão de forma inversa. Contudo, utilizou transformação mostrando, ao menos, já ter tido contato com essa técnica.
- O aluno ESM22 encontrou uma curva em vez de retas.

A função pedida para o esboço, na letra “b”, $f(x) = \frac{x}{2} - 2$ se tratava de uma função afim. Conjecturávamos obter resultados bem satisfatórios devido a sua facilidade. No entanto, constatamos que pouco mais da metade dos alunos conseguiram esboçar o gráfico corretamente, como nos mostra a Tabela 13.

Tabela 13: Resultado da letra b inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	17	58,6%
Errado	06	20,7%
Branco	06	20,7%

Quanto às técnicas para o traçado da função utilizada pelos alunos, observamos novamente uma grande inclinação pelo uso incondicional das tabelas, mesmo sendo esta uma função básica onde a simples determinação de dois pontos seria suficiente para o êxito no exercício, como podemos observar na Tabela 14.

Houve ainda 2 alunos que encontram, como resultado gráfico da função afim, uma curva semelhante a da função exponencial.

Tabela 14: Técnica aplicada na resolução da letra "b" inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Tabela	22	95,6%
Transformação	00	0%
Determinou dois pontos	01	4,4%

Segue algumas observações relativas às respostas dos alunos:

- O aluno ESM03 usou tabela, substitui 1 no "x" da expressão $\frac{x}{2} - 2$ e, encontrou $-\frac{1}{5}$. Demonstrou aqui ter muita dificuldade ou desconhecimento quanto às operações básicas que envolvem fração. Por fim, encontrou uma função decrescente.
- O aluno ESM05 não conseguiu encontrar uma reta, pois ao substituir 1 no valor de "x" na expressão $\frac{x}{2} - 2$, encontrou $-\frac{3}{2}$. Demonstrou ter muita dificuldade ou desconhecimento quanto às operações básicas que envolvem fração.
- O aluno ESM09 encontrou os pares ordenados corretamente, mas não os inseriu no plano. Esboçou uma reta que não corresponde ao gráfico da função do enunciado.
- O aluno ESM17 também mostrou não saber operar com frações, como podemos constatar na Figura 18.

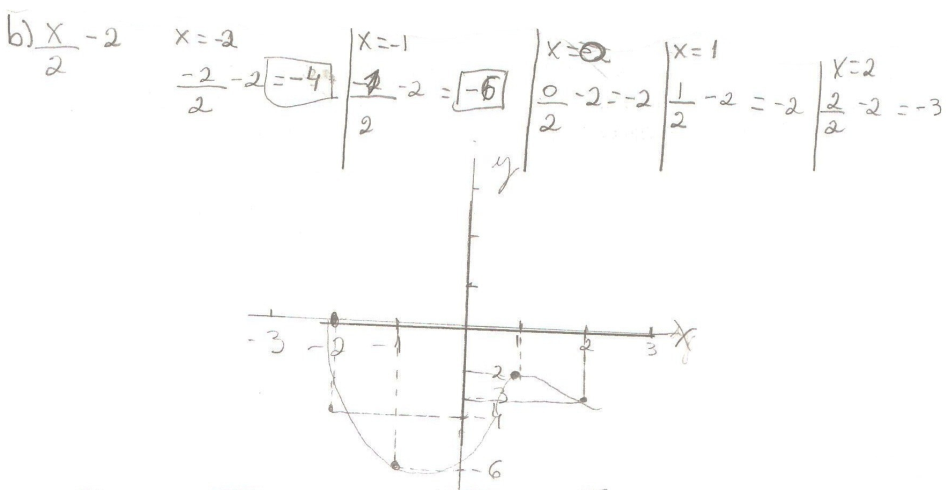


Figura 18: Erros de operações com funções do aluno ESM17

- O aluno ESM20 esboçou apenas o gráfico e de forma equivocada. Não ficou clara a técnica aplicada por ele na tentativa de solucionar o problema.
- O aluno ESM18 esboçou o gráfico encontrando dois pontos pertencentes a ele. Em seguida, traçou uma reta ligando esses dois pontos.
- Os alunos ESM25 e ESM26 traçaram corretamente o gráfico, mas não especificaram onde a reta corta o eixo "x" (raiz). Segue a resolução do aluno ESM25 (Figura 19).

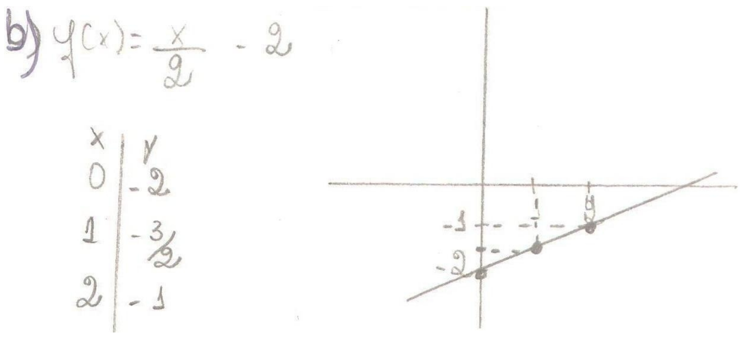


Figura 19: Falta de informação. Desenvolvimento do aluno ESM25

Fica evidente, mais uma vez, a inabilidade de grande parte dos alunos participantes, em operar com frações.

Com a letra "c" da questão 6, procuramos investigar o nível de compreensão dos alunos no que se refere ao traçado da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Como já vínhamos fazendo, deixamos "livres" para esboçarem o gráfico da função da maneira que julgarem mais convenientes. O resultado foi preocupante, apenas aproximadamente 40% dos alunos, esboçaram corretamente, a função pedida, como podemos verificar na Tabela 15.

Tabela 15: Resultado da letra c inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	11	37,9%
Errado	13	44,8%
Branco	05	17,3%

Analisamos também as técnicas utilizadas pelos alunos no traçado do gráfico da função quadrática, como elucida a Tabela 16.

Tabela 16: Técnica aplicada na resolução da letra "c" inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Tabela	18	75%
Transformação	00	0%
Báskara	06	25%
Fórmula do Vértice	01	3,4%

Segue abaixo algumas das observações relativas ao esboço do gráfico da função quadrática:

- O aluno ESM03 aplicou primeiramente a fórmula de Báskara para determinar as raízes. Em seguida concluiu que $\Delta < 0$. Não prosseguiu a resolução. Não esboçou o gráfico.
- O aluno ESM04 encontrou o "x" do vértice, mas afirmou não se lembrar da fórmula do "y" do vértice. Não percebeu que y_v é imagem do x_v e que, portanto, bastaria substituir o x_v na função para se determinar o y_v. Entendeu que o resultado gráfico dessa função seria uma parábola, mas não conseguiu especificar seus elementos como raiz, onde toca no y, etc. O desenvolvimento do aluno em questão pode ser visualizado na Figura 20.

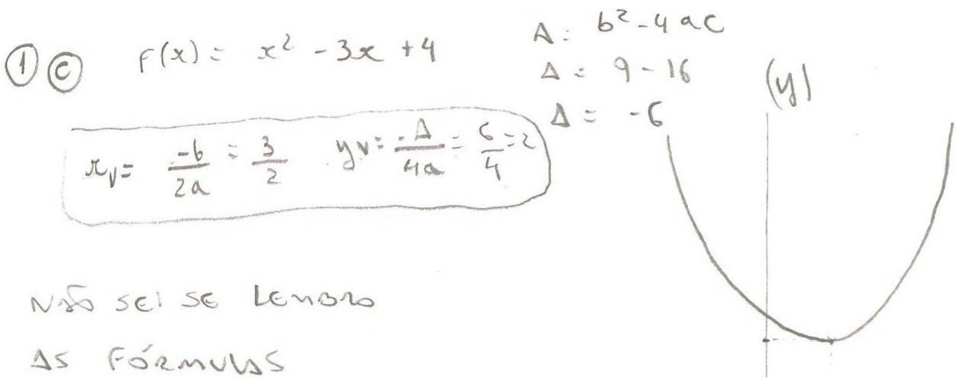


Figura 20: Desenvolvimento do aluno ESM04

- O aluno ESM05 usou tabela, atribuiu os valores {-1,0,1} e encontrou um "pedaço" da parábola, isto é, uma curva. Não concluiu os outros elementos constituintes da função como vértice, se existe ou não raízes, entre outro como mostra a Figura 21.

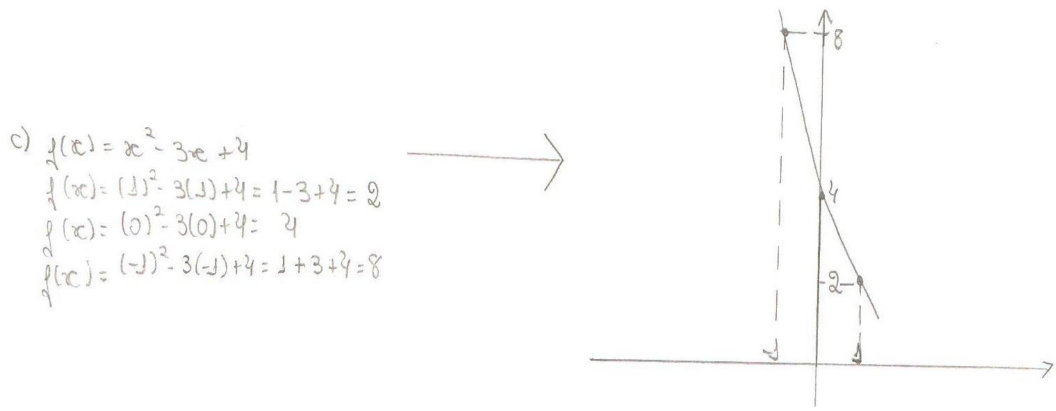


Figura 21: Desenvolvimento do aluno ESM05

- O aluno ESM08 não conseguiu identificar o vértice e por isso traçou uma reta em vez de curva.
- Os alunos ESM09 e ESM21 (Figura 22) demonstraram saber que o gráfico resultante da função é uma parábola que possui concavidade voltada para cima. No entanto, não souberam prosseguir a análise quando encontraram $\Delta < 0$. Ficou claro para nós que os professores buscam, quase sempre, adotar quadrados perfeitos para o delta ou, na pior das hipóteses, valores positivos**.** Portanto, alguns alunos ao se depararem com o valor do delta negativo ou não-quadrado perfeito acreditam ter errado a questão. “Vários alunos que se propõem a resolver uma equação do segundo grau pela fórmula de Bhaskara, ao encontrarem o valor de delta igual a 29, por exemplo, *refazem* as suas contas para se certificarem que elas estão corretas! Isso não aconteceria se o valor encontrado fosse 36” (MATHIAS 2008, p.14).

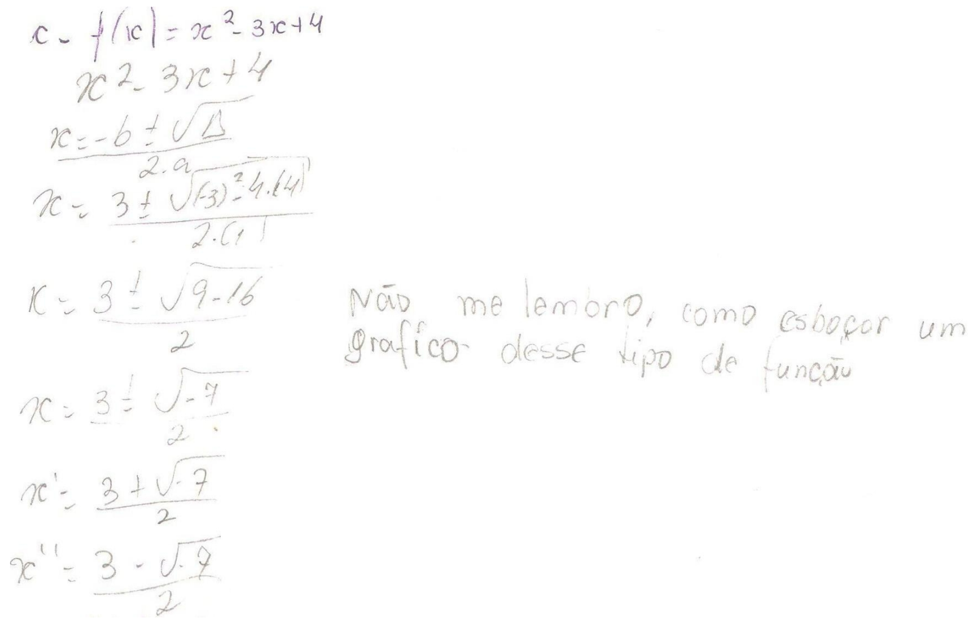


Figura 22: Desenvolvimento do aluno ESM21

- O aluno ESM17 tentou esboçar todo o gráfico usando apenas tabela. Com isso, não determinou o vértice.
- O aluno ESM18 usou Báskara, encontrou $\Delta < 0$ e não prosseguiu a resolução. Provavelmente julgou estar errado seu desenvolvimento ou pensou não existir um gráfico que represente tal função.
- O aluno ESM19 traçou a parábola através da tabela, mas não se lembra da fórmula do vértice.
- Os alunos ESM20 e ESM23 não utilizaram tabela, determinaram as raízes aplicando Báskara, determinando onde a parábola toca no eixo do "y" e traçando o gráfico. Não determinaram o vértice.
- Os alunos ESM22 (Figura 23) e ESM25 atribuíram valores para o "x" e encontraram suas imagens corretamente. Contudo, estes valores não foram suficientes para traçar a parábola nem analisar outros elementos como, por exemplo, o vértice da função.

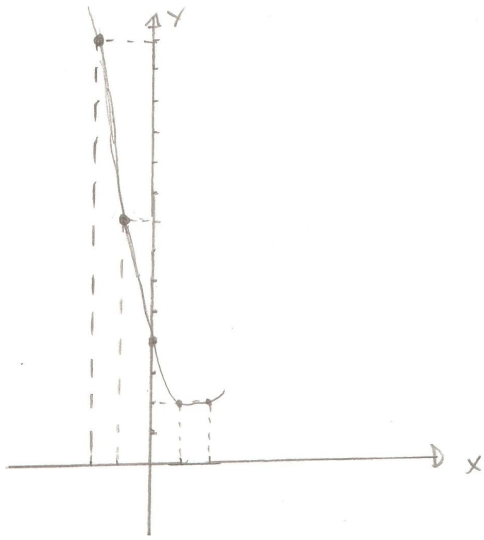


Figura 23: Esboço incompleto do gráfico realizado pelo aluno ESM22.

Como já imaginávamos os resultados inerentes a resolução das letras "d" e "e", relativos ao esboço de funções exponenciais, teve um resultado insatisfatório. Acreditamos que, muito pouco ou nada tenha sido abordado com os alunos sobre esse conteúdo matemático na época em que cursavam o ensino básico. Esperávamos que alguns alunos esboçassem os gráficos das funções exponenciais das letras "d" e "e" sem a necessidade de se apoiarem em técnicas.

A letra "d" da questão 6 nos mostrou o quanto estes alunos estavam distantes dos conceitos relativos as funções exponenciais. Isto ficou evidenciado no teste diagnóstico, pois três alunos nos alertaram o fato de não saberem funções exponenciais.

Contatamos que pouco mais de 24% dos alunos participantes, acertaram o esboço da função, como nos mostra a Tabela 17.

Tabela 17: Resultado da letra “d” inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	07	24,1%
Errado	15	51,8%
Branco	07	24,1%

Contrariando nossas expectativas, nenhum aluno esboçou diretamente o gráfico da função sugerida, todos recorreram ao uso da tabela. Dos 15 alunos que erraram a questão, 12 encontraram como o gráfico da função, uma reta e 3 uma parábola.

Segue algumas de nossas observações referentes à letra “d” da questão 6:

- O aluno ESM01 usou tabela, substituiu por valores arbitrários {-1, 0, 1}. Segundo o aluno, $2^{-1} = -2$ mostrando aqui desconhecimento da propriedade de potenciação. Por fim, deduziu que o gráfico da função é uma reta.
- O aluno ESM02 usou tabela, substituiu corretamente os valores arbitrários para “x” na função, mas errou na continuidade de seu gráfico que se assemelha a uma parábola, como nos mostra a Figura 24.

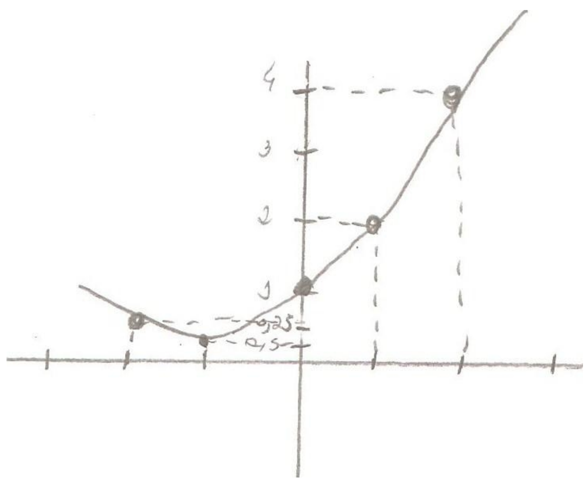


Figura 24: Esboço equivocado da função. Aluno ESM02

- Os alunos ESM03 e ESM26 utilizaram tabela, atribuíram os números naturais {0, 2, 3} na função e não conseguiram visualizar a curva e sim uma reta. Só usaram valores positivos. Percebe-se uma tendência em se “esquivar”, de certa maneira, de valores negativos. Podemos observar o gráfico do aluno ESM26 na Figura 25.

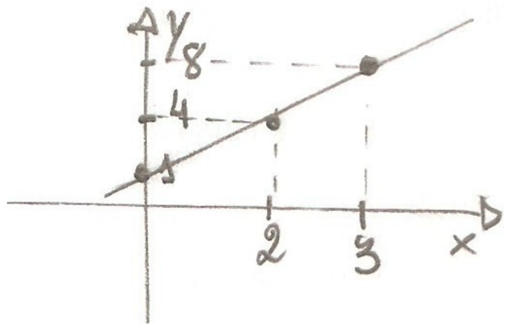


Figura 25: Esboço equivocado da função exponencial. Aluno ESM26

- O aluno ESM08 realizou todos os procedimentos para o esboço da função corretamente. No entanto, seu gráfico se assemelha a uma parábola. Não conhece a continuidade do gráfico da função.
- O aluno ESM11 utilizou tabela e atribuiu os valores {2, 1, 0, -1, -2} ao “x”. No entanto, não soube resolver as seguintes operações: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4}$. Não soube operar com frações. Com isso, não esboçou corretamente o gráfico. Mais uma evidência da dificuldade em se operar com frações.
- Os alunos ESM12, ESM27 e ESM29 como atribuíram apenas valores positivos ao “x” não conseguiram determinar o comportamento do gráfico da função quando “x” é negativo, o gráfico ficou incompleto. A Figura 26 refere-se à resolução do aluno ESM27.

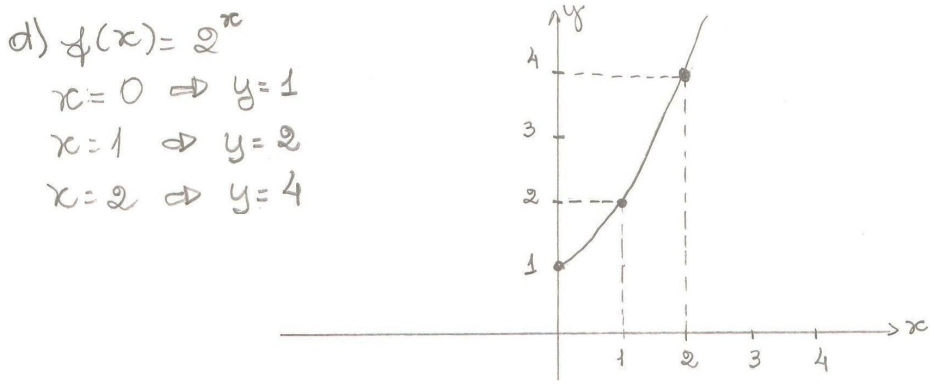


Figura 26: Esboço incompleto do gráfico da função exponencial do aluno ESM27

- Os alunos ESM17, ESM21 e ESM25 encontraram os valores corretamente dos pares ordenados, mas ao inserirem no plano concluíram equivocadamente que o gráfico se tratava de uma reta e não uma curva. Faltou aqui um cuidado quanto à simetria entre os pontos nos eixos ortogonais.

- O aluno ESM19 ao atribuir apenas valores positivos para "x", não observou que o gráfico da função se tratava de uma curva e não de uma reta.
- O aluno ESM22 confundiu o gráfico da função $y = 2^x$ com a função $y = x^2$, como podemos observar na Figura 27.

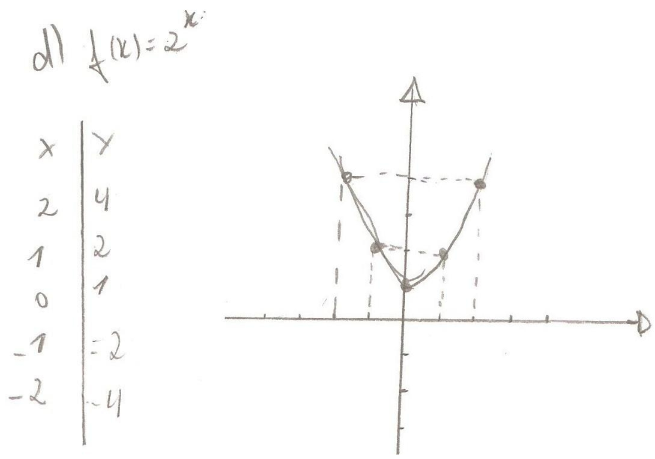


Figura 27: O aluno ESM22 confundiu o gráfico da função exponencial $y = 2^x$ com o gráfico da função quadrática $y = x^2$

De modo análogo ao exercício anterior, solicitamos aos alunos que esboçassem o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ juntamente com suas análises descritivas. Pudemos observar que os alunos encontraram muita dificuldade na resolução desse exercício. Pouco mais de 17,2% dos que realizaram a atividade, acertaram o traçado do gráfico (Tabela 18).

Tabela 18: Resultado da letra e inerente a questão 6 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	05	17,2%
Errado	16	55,2%
Branco	08	27,6%

Novamente, a tabela foi utilizada por todos no esboço da função exponencial. Dos diversos tipos de gráficos equivocados que computamos, 7 alunos encontraram uma reta e 1 encontrou uma parábola.

Segue algumas de nossas observações referentes à letra “e” da questão 6:

- Os alunos ESM02 e ESM22 usaram tabela, marcaram os pontos no plano. No entanto, concluíram que 0,25 > 0,5. Isso mostra que o aluno tem dificuldade em comparar números decimais. O esboçou de seu gráfico também foi equivocado como nos mostra a Figura 28.

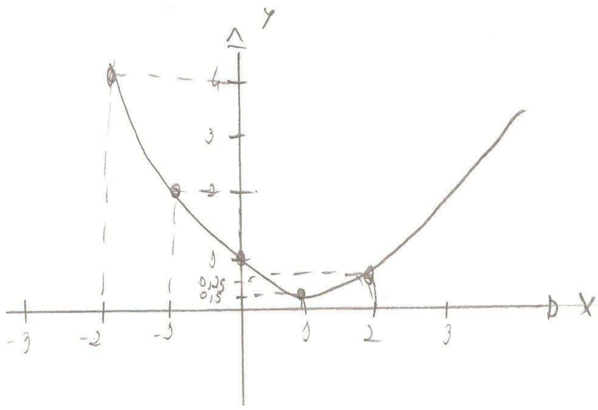


Figura 28: O aluno ESM02 apresentou dificuldade quanto a identificação de tamanho entre valores decimais

- O aluno ESM03 usou tabela, utilizou os valores {1, 2, 3}, isto é, apenas valores naturais. Traçou uma reta crescente, pois marcou os pontos equivocadamente. Demonstrou ter muita dificuldade em operar com frações.
- O aluno ESM04 como utilizou apenas os números naturais {1, 2, 3, 4} como valores arbitrários para “x”, não conseguiu perceber que o gráfico toca no eixo “x” quando o $x = 0$ (Figura 29).

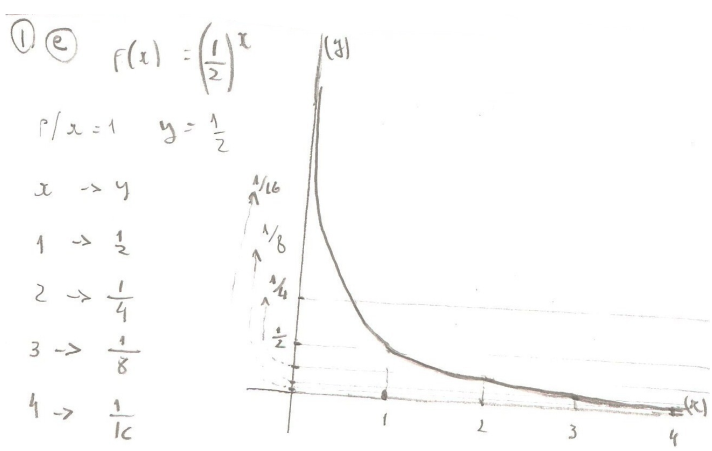


Figura 29: O aluno ESM04 equivocou-se ao determinar o domínio da função

- Os alunos ESM11 e ESM22 marcaram alguns pontos corretamente no plano cartesiano, mas não traçaram o gráfico.
- O aluno ESM17 usou tabela, encontrou os pares corretamente, mas não conseguiu concluir que o gráfico se tratava de uma curva, como nos mostra a Figura 30.

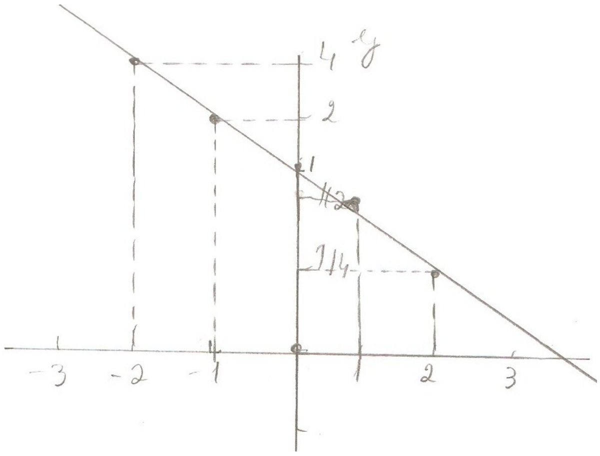


Figura 30: O aluno ESM17 esboçou incorretamente a função exponencial

- O aluno ESM19 atribuiu apenas valores positivos para “x” e não conseguiu observar que o gráfico da função se tratava de uma curva e não uma reta.
- O aluno ESM20 confundiu o gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ com o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Podemos observar o equívoco na Figura 31.

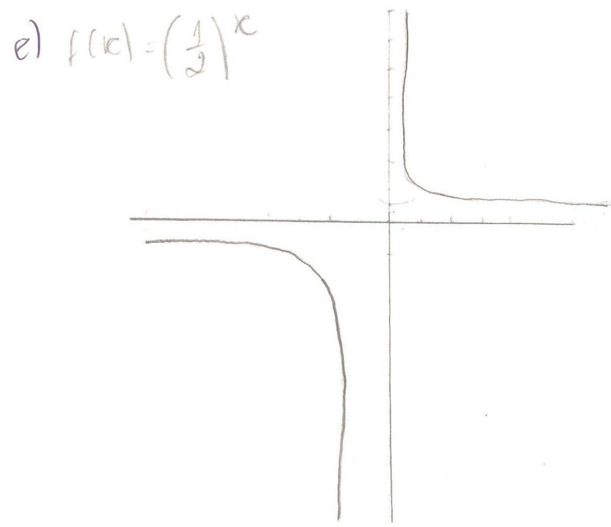


Figura 31: O aluno ESM20 confundiu o gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ com o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

- O aluno ESM26 equivocou-se ao substituir $x = 2$ na função: segundo ele, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
- O aluno ESM23 errou ao operar com potenciação. Segundo ele: ao substituir "x" por 3, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}$. Ele demonstrou desconhecimento das propriedades de potenciação. Multiplicou os número 2 e 3 em vez de calcular a potenciação 2^3.
- O aluno ESM25 realizou a substituição do "x" por 2 e encontrou: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$.

A questão 7 teve como propósito investigar o nível de compreensão do alunos quanto a aplicabilidade do conceito de funções exponenciais em situações-problemas e a capacidade dos mesmos em analisar, graficamente, essas funções.

Assim como ficou evidenciado a falta de habilidade no que tange ao traçado de gráficos de funções exponenciais, constatamos também essa deficiência na aplicação de tal conceito. Apenas 31% dos alunos que realizaram a atividade obtiveram o aproveitamento máximo nessa questão. Podemos observar, com mais detalhes, na Tabela 19.

Tabela 19: Resultado da questão 7 do teste diagnóstico

Resultados	Alunos	Porcentagem
Acertou todas as letras	09	31%
Acertou apenas as letras a e b	00	0%
Acertou apenas as letras a e c	00	0%
Acertou apenas as letras b e c	00	0%
Acertou apenas a letra a	00	0%
Acertou apenas a letra b	00	0%
Acertou apenas a letra c	05	17,2%
Errou todas as letras	02	6,9%
Branco	13	44,9%

Segue algumas de nossas observações acerca da resolução dos alunos no que se refere à questão 7:

- O aluno ESM02 acertou a letra "c", tentou resolver a letra "b" igualando as funções, mas mostrou não conhecer as propriedades da potenciação. Segundo ele: $4.2^t = 8^t$. O mesmo erro cometeu o aluno ESM19. Ambos mostraram não saber resolver equações exponenciais.

- O aluno ESM10 afirmou que nunca teve oportunidade de resolver problemas envolvendo funções exponenciais.
- O aluno ESM25 tentou desenvolver a questão "a" sem sucesso. Segundo ele, $2^{t+2} = -\frac{2}{t+2}$. Deixou a questão "b" em branco e acertou a letra "c".
- O aluno ESM27 deixou a letra "a" em branco. Na letra "b" entendeu que para encontrar o ponto de interseção entre as funções é necessário igualar as funções. No desenvolvimento da questão não acertou, como nos mostra a Figura 32. O mesmo acertou a letra "c".

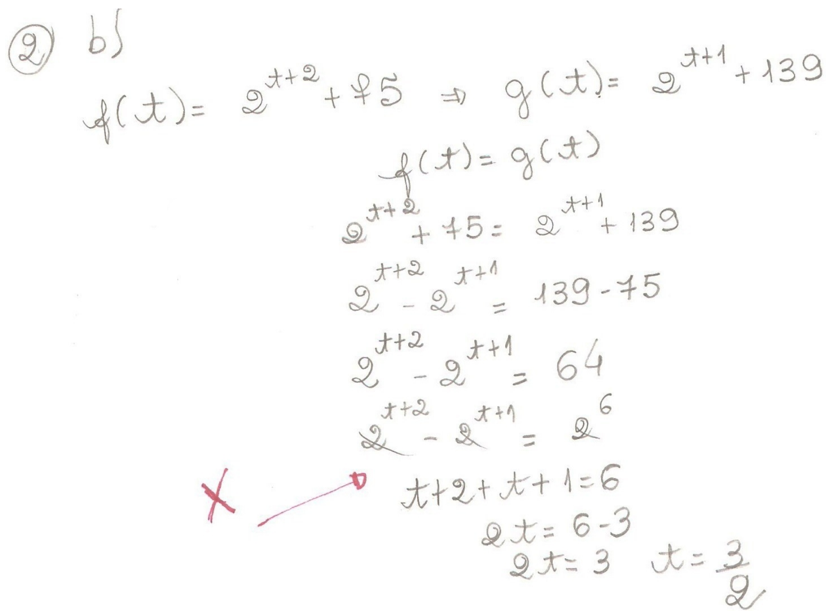


Figura 32: Desenvolvimento da letra "b" pelo aluno ESM27

Ficou nítida a inabilidade desses alunos quanto às técnicas operatórias envolvendo equações exponenciais.

Finalizamos o teste diagnóstico com a questão 8, onde buscávamos investigar o nível de compreensão dos alunos quanto a aplicação do conceito de funções logarítmicas em situações-problemas. O resultado, como já prevíamos, foi abaixo do que julgamos de ideal. Pouco mais de 10% dos alunos obtiveram êxito na questão.

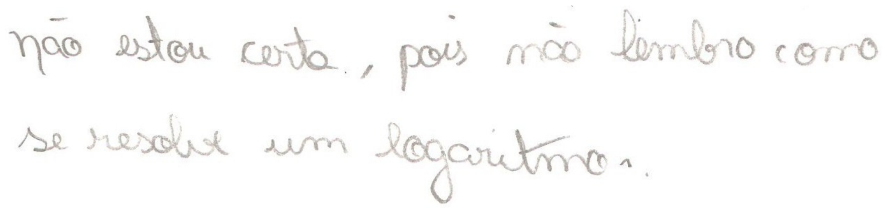
Observamos que os alunos encontraram mais dificuldade na resolução das equações logarítmicas. Muitos já haviam dito que nem chegaram a estudar esse conteúdo no ensino médio. Segue a Tabela 20 com o resultado da questão citada.

Tabela 20: Resultado da questão 8 do teste diagnóstico

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	03	10,3%
Errado	21	72,4%
Branco	05	17,3%

Segue algumas de nossas observações referente à questão 8:

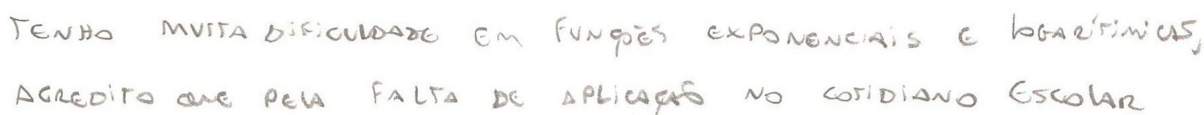
- Os participantes ESM01, ESM02, ESM03, ESM05, ESM11, ESM16, ESM17, ESM19, ESM23, ESM24, ESM25, ESM27 e ESM29 afirmaram não saberem ou não recordarem dos procedimentos e propriedades básicas necessárias para a resolução de problemas em que são aplicados os logaritmos. O depoimento do aluno ESM01 (Figura 33) exemplifica perfeitamente essa situação.



não estou certa, pois não lembro como se resolve um logaritmo.

Figura 33: Depoimento do aluno ESM01 sobre a questão 8 do teste diagnóstico

- O aluno ESM04 afirmou que possui muitas dificuldades em funções exponenciais e logarítmicas. Provavelmente isso se deve pela falta de contextualização do mesmo na época em que curso o ensino médio (Figura 34).



TENHO MUITA DIFICULDADE EM FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS, ACREDITO QUE PELA FALTA DE APLICAÇÃO NO COTIDIANO ESCOLAR

Figura 34: Depoimento do aluno ESM04 sobre a questão 8 do teste diagnóstico

- O aluno ESM08 afirmou não compreender a proposta do problema.
- O aluno ESM12 demonstrou ter conhecimento das propriedades necessárias para resolução do problema, porém, errou no momento final: $\log_3(t+1) = 2 \Rightarrow 2^3 = t+1$.
- O aluno ESM20 alegou não se lembrar ter estudado logaritmo quando cursou o ensino médio. Segundo ele, muitos conteúdos eram omitidos pelo professor.

- O aluno ESM26 afirmou que apenas teve uma pequena noção desse tópico matemático na época em que cursou o ensino médio (Figura 35).


OBS: Eu não sei resolver questões logaritmicas, pois ano passado consegui apenas uma noção que, hoje já não lembro mais.

Figura 35: Depoimento do aluno ESM26 sobre a questão 8 do teste diagnóstico

Pudemos observar que grande parte dos alunos utiliza, tão somente, números naturais nas tabelas. Isso se dá provavelmente a grande dificuldade em se trabalhar com números negativos, fracionários e decimais. Muitos não sabem comparar, em termos de tamanho, os racionais.

Quanto ao tempo disponível para a realização do teste diagnóstico, 5 alunos se justificaram alegando não ter tido tempo suficiente para terminar o teste, fato esse, que segundo eles, justifica alguns dos erros cometidos e as questões em branco.

4.2. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES AFINS

Após as intervenções, onde procuramos elucidar as transformações geométricas ocorridas em funções afins, aplicamos um teste de verificação onde buscamos averiguar o nível de compreensão dos alunos acerca das transformações geométricas ocorridas nos gráficos a partir da função básica $y = x$.

O teste de verificação consistiu em um enunciado único propondo o traçado de 4 funções afins, ordenados alfabeticamente (“a”, “b”, “c” e “d”), onde os alunos deveriam esboçar os gráficos das funções a partir da função básica $y = x$, isto é, através de movimento rígidos que ocorrem no plano como rotação e translação. Além do traçado do gráfico, os alunos deveriam relatar, por escrito, todos os procedimentos realizados por eles na elaboração da atividade.

Não nos preocupamos com pontos notáveis da função como domínio, raiz e ângulo entre a reta e o eixo. Focamos, tão somente, nos movimentos rígidos ocorridos no plano. Participaram desse teste 27 alunos. Segue a análise quantitativa e qualitativa de alguns alunos.

Na questão referente à letra “a”, o objetivo era a de que os alunos identificassem a função $y = 3x$ como o resultado de uma rotação do gráfico em direção ao eixo x, tendo com ponto de partida a função básica $y = x$.

Pudemos observar, com os dados colhidos, que os alunos não tiveram dificuldades na realização do esboço desse gráfico. Segue na Tabela 21, o resultado mais detalhado.

Tabela 21: Análise dos esboços do gráfico referente à letra “a”

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	26	96,3%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	00	0%
Branco	01	3,7%

Quanto às observações dos alunos, apenas 37% relataram, perfeitamente, os movimentos ocorridos na função (Tabela 22). Percebe-se uma grande dificuldade destes em descrever a ocorrência de tais movimentos.

Tabela 22: Resultado das observações feitas pelos alunos relativos aos movimentos do gráfico da letra “a”

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	10	37%
Parcialmente correto	16	59,3%
Errado	00	0%
Não comentou	01	3,7%

Segue abaixo as observações relativas ao resultado obtido na resolução da questão. Foi considerado “Parcialmente correto” o comentário que se limitou apenas a informar o movimento de transformação ocorrido (rotação).

- Dos comentários considerados como “Parcialmente correto”, 7 alunos mencionaram o movimento de rotação, mas não correlacionaram com a função $y = x$.
- O aluno ESM10 esboçou o gráfico corretamente, mas comentou equivocadamente ao afirmar que o gráfico rotacionou em relação à origem e que transladou, como podemos observar na Figura 36.

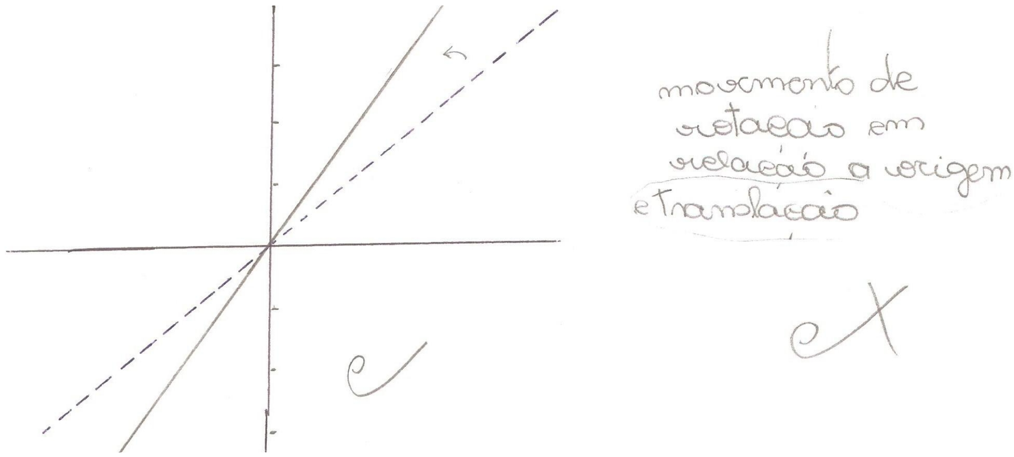


Figura 36: Esboço e relato das transformações feitas pelo aluno ESM10

- O aluno ESM07 afirmou corretamente que o movimento que ocorre é o de rotação. No entanto, equivocou-se ao afirmar que o ângulo diminui em relação à $y = x$ quando $a > 1$.
- Os alunos ESM20 e ESM28 afirmaram corretamente que o movimento ocorrido nesse caso é o de rotação. Contudo, atribui equivocadamente esse fato ao sinal positivo do coeficiente “a”. Na verdade, seja o “a” positivo ou negativo, sua variação acarretará em uma mudança da angulação da reta em relação ao eixo x. Se a resolução do aluno ESM20 na Figura 37.

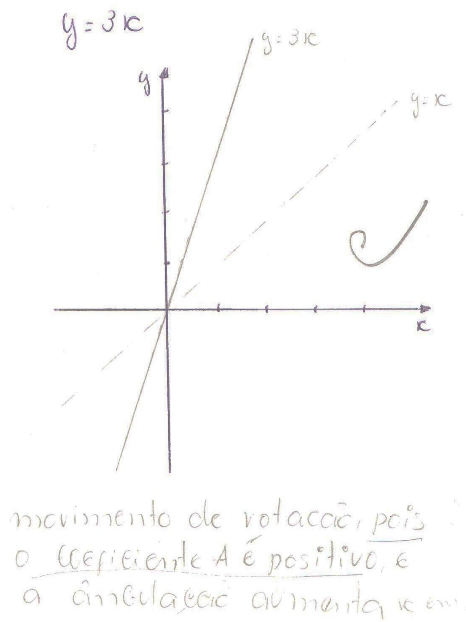


Figura 37: Esboço e relato das transformações feitas pelo aluno ESM20

- O aluno ESM22 afirmou corretamente que houve o movimento de rotação e que o responsável por ele é o coeficiente “a”. Porém, não explicitou o quanto essa angulação se alterou, isto é, não realizou um comparativo com a função $y = x$.
- O aluno ESM29 afirmou que a reta do gráfico faz um movimento de rotação <u>em torno do eixo x</u> aumentando sua inclinação. A parte grifada esta equivocada, pois dá a entender que o gráfico da função gira em torno do eixo x na medida em que variamos o coeficiente angular.
- O gráfico da função $y = 3x$ faz um movimento de rotação <u>em torno do eixo x</u>.
- Alguns alunos atribuíram o fato do gráfico rotacionar ao sinal positivo do coeficiente “a”.

A questão da letra “b” objetivou identificar a função $y = 4x - 1$ como o resultado de uma rotação do gráfico em direção ao eixo x e uma translação vertical para baixo, tendo com ponto de partida a função básica $y = x$.

Para nossa surpresa, tivemos um aproveitamento de 100% de acertos nessa questão, como elucida a Tabela 23.

Tabela 23: Análise dos esboços do gráfico referente à letra “b”

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	27	100%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	00	0%
Branco	00	0%

Quanto aos comentários anotados pelos alunos, o resultado foi insatisfatório (Tabela 24). Pouco mais de 40% relataram com precisão, por escrito, os movimentos ocorridos no plano. Consideramos como “Parcialmente correto” o comentário que se limitou apenas a informar os movimentos de transformação ocorridos (rotação e translação).

Tabela 24: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "b"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	11	40,7%
Parcialmente correto	13	48,2%
Errado	02	7,4%
Não comentou	01	3,7%

Segue abaixo nossas observações relativas ao resultado obtido na resolução da questão.

- Dos comentários considerados como "Parcialmente corretos", 6 alunos mencionaram os movimentos de rotação e de translação mas não correlacionaram com a função $y = x$.
- O aluno ESM23 falou dos movimentos ocorridos no gráfico corretamente (rotação e translação), mas afirmou que o gráfico rotacionou em torno da origem e realizou um movimento de translação para direita, o que não ocorreu.
- O aluno ESM03 afirmou que o gráfico transladou para direita, o que não ocorreu.
- Os alunos ESM09 e ESM20 explicitaram corretamente sobre os movimentos de rotação e translação ocorridos no plano, mas equivocou-se ao afirmar que o movimento de rotação ocorreu porque o coeficiente "a" é positivo. Vale ressaltar que o movimento de rotação do gráfico em relação ao eixo do x acontece independentemente do sinal do coeficiente "a".
- Os alunos ESM16, ESM25 e ESM26 explicitaram corretamente sobre os movimentos ocorridos no plano, mas equivocaram-se ao afirmarem que a rotação do gráfico acontece em relação à zero.
- O aluno ESM22 apenas afirmou que o movimento de rotação e translação acontece porque apresentam os coeficientes "a" e "b", mas não explicitou como esses movimentos ocorrem.

A questão da letra "c" objetivou fazer com que o aluno identificasse a função $y = -2x - 3$ como sendo o resultado dos movimentos rígidos de rotação, translação e reflexão a partir da função básica $y = x$.

Julgamos ter obtido um resultado positivo. Quase 90% dos alunos que realizaram a atividade acertaram o esboço do gráfico, como elucida a Tabela 25.

Tabela 25: Análise dos esboços do gráfico referente à letra "c"

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	24	88.9%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	03	11,1%
Branco	00	0%

Quanto aos comentários anotados pelos alunos, o resultado foi muito abaixo do que prevíamos. Pouco mais de 33% relataram com precisão os movimentos ocorridos no plano.

Consideramos como "Parcialmente correto" o comentário que se limitou apenas a informar os movimentos de transformação ocorridos (rotação, translação e reflexão). A não menção de algum desses movimentos no comentário se caracterizou como errada. Segue o resultado completo na Tabela 26.

Tabela 26: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "c"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	09	33,4%
Parcialmente correto	05	18,5%
Errado	12	44,4%
Não comentou	01	3,7%

Segue abaixo nossas observações relativas ao resultado obtido na resolução da questão.

- Dos comentários considerados como "Parcialmente correto", apenas um aluno mencionou os três movimentos ocorridos no plano.
- 13 alunos identificaram apenas os movimentos de rotação e translação no plano.
- 01 aluno identificou apenas os movimentos de rotação e reflexão no plano.
- O aluno ESM09 traçou o gráfico da função $y = -2x - 3$, colocando primeiramente o -1 em evidência $y = -(2x + 3)$. Dessa forma, esboçou o gráfico da função dentro dos

parênteses (translação e rotação). Em seguida, como toda a função está negativa, refletiu a função em relação ao eixo x. Segue o desenvolvimento na íntegra na Figura 38.

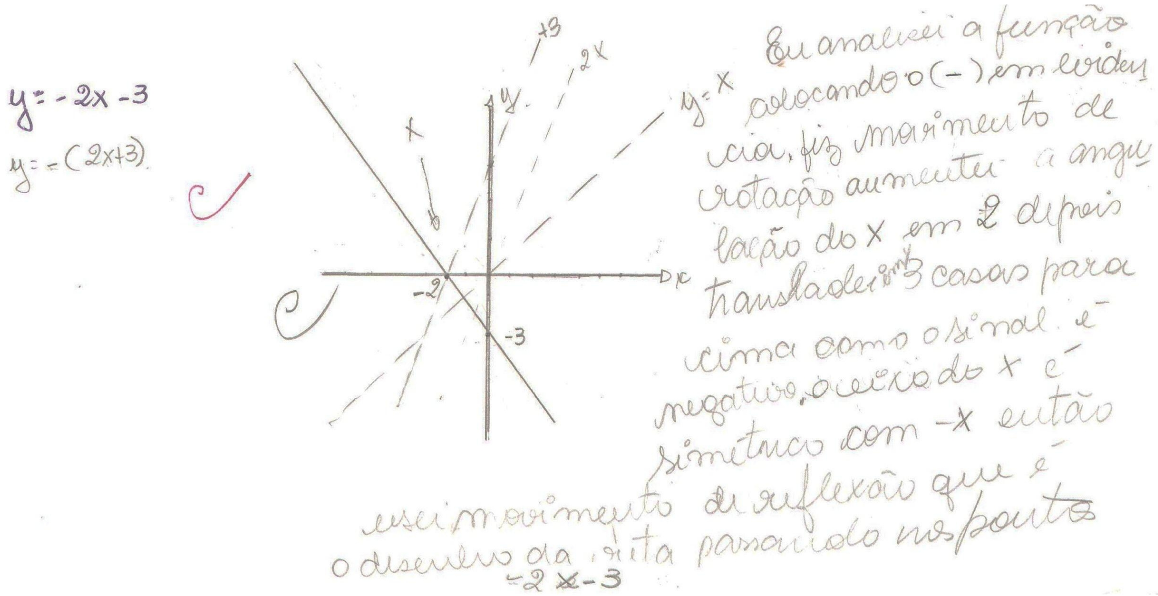


Figura 38: Esboço e relato das transformações feitas corretamente pelo aluno ESM09

- Os alunos ESM16 e ESM28 esboçaram corretamente o gráfico da função, porém no comentário afirmou que ocorrem três movimentos no plano (rotação, translação e reflexão), mas não detalha como isso acontece.
- O aluno ESM23 esboçou e comentou o gráfico de forma equivocada, como podemos observar na Figura 39.

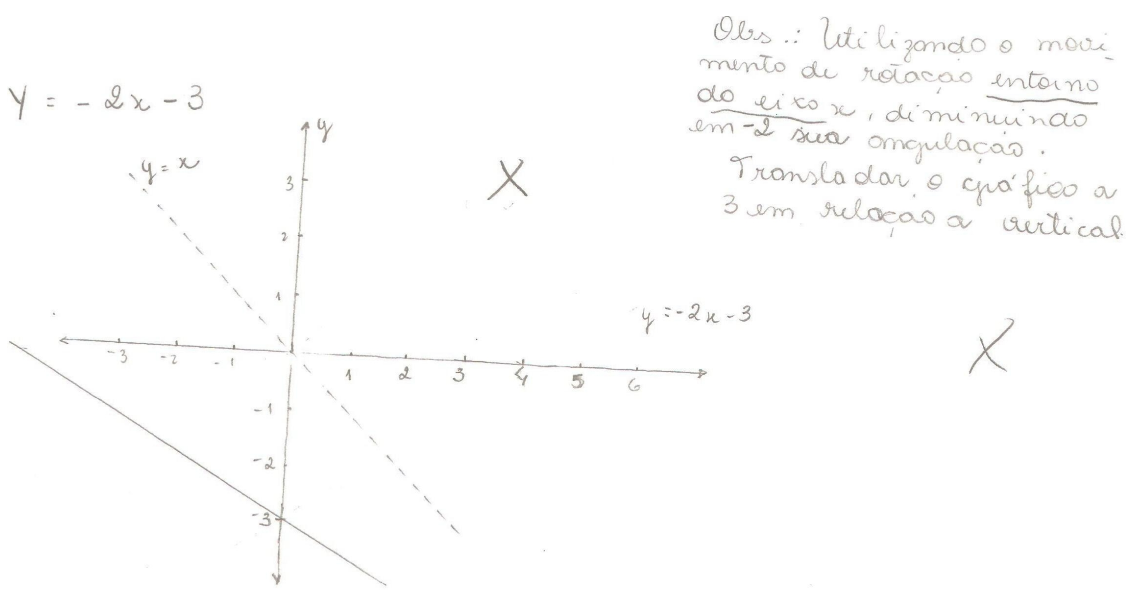


Figura 39: Esboço e relato das transformações feitas pelo aluno ESM23

- O aluno ESM26 afirma que a rotação ocorrida é em relação à zero.

A questão da letra "d" objetivou fazer com que o aluno identificasse a função $y = \frac{x-2}{2}$ como sendo o resultado dos movimentos rígidos de rotação e translação a partir da função básica $y = x$.

Esperávamos também que os alunos deduzissem que $y = \frac{x-2}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - 1$. Assim, a função ficaria mais nítida e aplicação das transformações geométricas a partir da função básica $y = x$ ocorreria de forma natural.

Julgamos ter obtido um resultado satisfatório, mediante o fato de o aluno ter que colocar a função na forma $y = ax + b$ e, a partir daí, efetivar os movimentos rígidos para o esboço. Um pouco mais de 74% dos alunos que realizaram a atividade traçaram corretamente o gráfico da função aplicando o método elucidado por nós nas aulas de intervenção. Os dados completos podem ser vistos na Tabela 27.

Tabela 27: Análise dos esboços do gráfico referente à letra "d"

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	20	74,1%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	07	25,9%
Branco	00	0%

Quanto aos comentários anotados pelos alunos, o resultado foi muito abaixo do esperado (Tabela 28). Apenas quase 25,9% relataram com precisão, por escrito, os movimentos ocorridos no plano. Consideramos "Parcialmente correto" o comentário que se limitou apenas a informar os movimentos de transformação ocorridos (rotação e translação).

Tabela 28: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "d"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	07	25,9%
Parcialmente correto	10	37,1%
Errado	09	33,3%
Não comentou	01	3,7%

Segue algumas observações anotadas por nós referentes ao resultado da resolução da questão:

- Dos comentários considerados como "Parcialmente correto", 13 alunos mencionaram os movimentos ocorridos no plano (rotação e translação).
- 13 alunos identificaram apenas os movimentos de rotação e translação no plano.
- Dos alunos que comentaram os movimentos ocorridos no plano, 12 alunos não demonstraram que $y = \frac{x-2}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - 1$ não ficando claro como conseguiram esboçar o gráfico.
- O aluno ESM23 transformou a função na forma $y = ax + b$, mas esboçou de forma equivocada seu gráfico. Entendeu que quando $0 < a < 10$ a angulação aumenta comparando-se com o gráfico da função $y = x$. Consequentemente o comentário também ficou equivocado.
- O aluno ESM24 confundiu as propriedades operatórias da multiplicação com a da subtração e adição: $y = \frac{x-2}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - 2$.
- O aluno ESM29 apenas se equivocou ao afirmar que a rotação do gráfico acontece em torno do eixo x.

4.3. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Logo após as aulas de intervenção versando sobre as transformações geométricas em funções quadráticas, aplicamos o teste de verificação constituído por um enunciado único e quatro funções quadráticas, na forma geral, ordenadas alfabeticamente, e em nível crescente de dificuldade. Os alunos deveriam converter as funções quadráticas na forma geral para a forma canônica a fim de que se tornasse explícito, na fórmula, seu vértice e, consequentemente, facilitassem o esboço da função por transformações geométricas.

Segundo os PCN (2006) o estudo do gráfico da função quadrática principalmente no que se refere ao posicionamento do gráfico no plano, coordenadas do vértice e raízes da função, por exemplo, deve ser feito de maneira que permita ao aluno compreender as relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica a fim de que o mesmo não priorize a memorização de regras e fórmulas. Nesse sentido, a função quadrática na forma canônica $y = a(x-m)^2 + n$ pode se tornar um auxiliar em potencial para essa compreensão.

Para se chegar à forma canônica, elucidamos duas técnicas: a complementação do quadrado e a aplicação direta da fórmula do vértice, como nos mostra a Figura 40. Para esse teste, deixamos facultativo o método a ser aplicado.

Figura 40: Conversão da função quadrática da forma geral para a forma canônica

Juntamente com a folha de atividades, distribuímos uma folha quadriculada onde os alunos deveriam realizar o traçado do gráfico. O objetivo era a de medir o nível de compreensão em relação a esse tema. As atividades foram realizadas por 23 alunos participantes. Como critério para análise, procuramos detalhar o desenvolvimento de todos os alunos sob os seguintes aspectos: esboço do gráfico, conversão da forma geral para a forma canônica e a técnica aplicada e os comentários sobre as transformações ocorridas em cada função.

A questão referente à letra “a” apresenta um nível de dificuldade considerado fácil. Ao transformar a função $y = x^2 - 10x + 25$ da forma geral para a canônica, o aluno não encontra grandes dificuldades. Esperávamos que o aluno aplicasse uma das técnicas ensinadas por nós: complementação do quadrado ou as fórmulas do vértice, contrapondo-se ao uso da tabela e em seguida traçasse o gráfico através de transformações geométricas a partir da função básica $y = x^2$. Através de qualquer um dos métodos, o aluno encontraria com certa facilidade, a função $y = (x-5)^2$. Na verdade, a função proposta se tratava de uma função quadrática perfeita, onde não se aplicaria a complementação do quadrado. Bastaria tão somente constatar a existência de uma única raiz. Desta forma, o processo de traçado do gráfico por transformação geométrica se tornaria mais simplificado.

O resultado foi muito satisfatório. Conforme nos mostra a Tabela 29. Mais de 90% dos alunos que realizaram o teste obtiveram êxito na questão.

Tabela 29: Resultado da letra "a"

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	21	91,4%
Parcialmente correto	01	4,3%
Errado	00	0%
Branco	01	4,3%

Analisando a habilidade dos alunos quanto à técnica de conversão da função quadrática na forma geral para a canônica, todos os alunos obtiveram êxito.

Quanto às observações escritas pelos alunos, quase 61% relataram com clareza e detalhes os movimentos ocorridos na construção do gráfico, como podemos observar na Tabela 30.

Tabela 30: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "a"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	14	60,9%
Parcialmente correto	04	17,4%
Errado	00	0%
Não comentou	05	21,7%

Realizamos também o levantamento das técnicas utilizadas por eles na conversão da função quadrática na forma geral para a forma canônica. Vale ressaltar que não impusemos a utilização de nenhum método em específico e nem tão pouco coibimos o uso da tabela no traçado do gráfico. Apenas solicitamos que esboçassem o gráfico da função quadrática proposto.

A grande maioria optou por utilizar o método da complementação do quadrado, como podemos observar na Tabela 31. A porcentagem aferida está em relação ao total de alunos que fizeram a questão e não ao universo dos alunos participantes.

Tabela 31: Técnica aplicada na resolução da letra “a”

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Complementação do Quadrado	18	81,8%
Fórmula do Vértice	04	18,2%
Tabela	00	0%

Segue algumas outras observações nossas quanto à resolução dos alunos referente à questão “a”:

- Os alunos ESM01, ESM02, ESM18, ESM20, ESM22, ESM25 e ESM26 não mencionaram onde o gráfico intercepta o eixo y, como mostra a Figura 41.

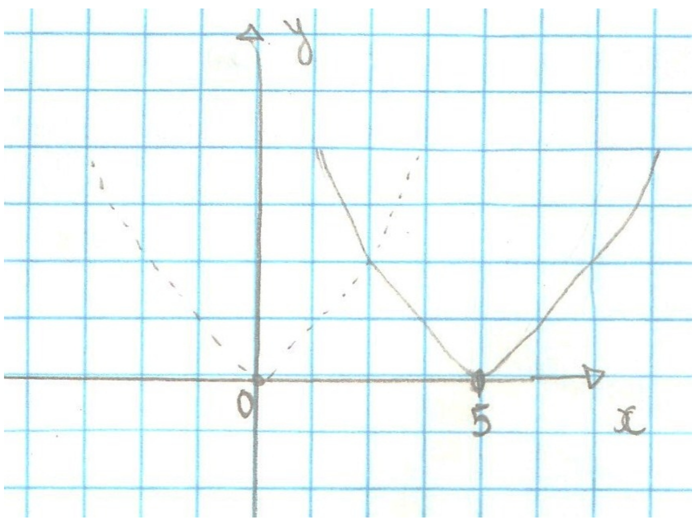


Figura 41: Esboço do aluno ESM01

- O aluno ESM05 equivocou-se ao afirmar que a parábola “transladou 5cm à direita” (Figura 42). Em nenhum momento foi especificado a unidade de medida. No entanto, tal resposta não foi computada como erro.

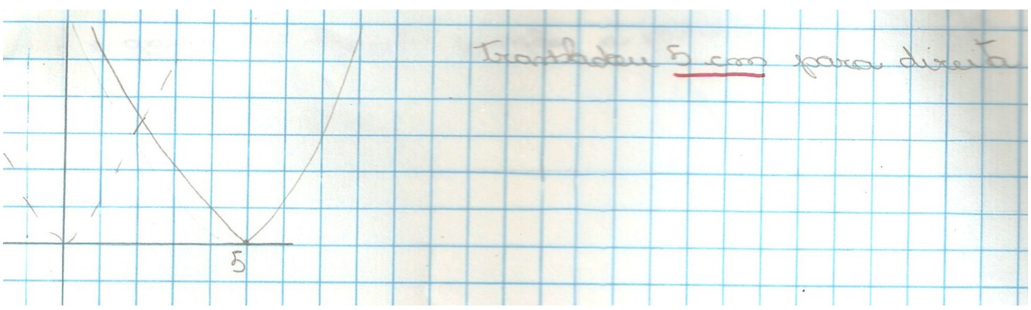


Figura 42: Esboço e comentário do aluno ESM05

- Os alunos ESM09, ESM11 e ESM29 fizeram uma observação incompleta. Afirmaram que o gráfico "transladou 5 unidades", porém não explicitou para qual direção e sentido. Tal resposta não foi computada como erro. O restante da atividade foi elaborado com êxito por eles.
- O aluno ESM27 cometeu um único equívoco. Encontrou o par ordenado (0,5) como ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y, sendo que o ponto seria (0,25), como nos mostra a Figura 43.

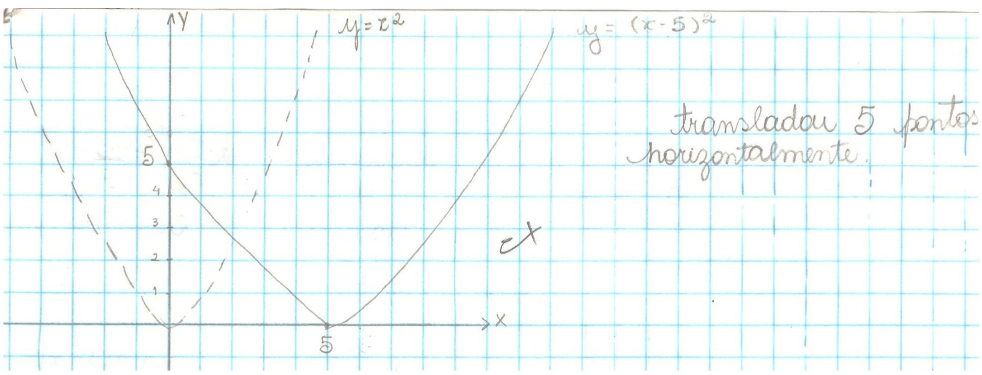


Figura 43: Esboço e comentário do aluno ESM27

A questão referente à letra "b" apresentava um nível de dificuldade mais acentuado em comparação com a primeira. A função $y = x^2 - 6x + 10$ não se tratava de um trinômio quadrado perfeito, por tanto, o aluno deveria lançar mão de outras técnicas. Ficamos na expectativa de que aplicassem um dos métodos que ensinamos. Segue um exemplo da complementação do quadrado para a conversão:

$y = x^2 - 6x + 10 \longleftarrow$ Forma Geral

$y = x^2 - 6x + 9 + 1$

$y = (x - 3)^2 + 1 \longleftarrow$ Forma Canônica

A outra possibilidade referenciada aqui é a aplicação direta da fórmula do vértice. Sendo $y = a(x - m)^2 + n$ uma função quadrática disposta na forma canônica, onde "a" é o coeficiente da própria função quadrática na forma geral ($y = ax^2 + bx + c$) e (m, n) são as coordenadas do vértice da parábola, bastaria ao aluno aplicar as respectivas fórmulas $m = \frac{-b}{2a}$

e $n = \frac{-\Delta}{4a}$ respectivamente para se determinar os valores do “x” e “y” do vértice. Em seguida, o aluno faria a substituição desses valores na fórmula $y = a(x-m)^2 + n$.

Neste caso, $a = 1$ e a coordenada do vértice é $(3,1)$. Desse modo, a partir do gráfico da função básica $y = x^2$, há uma translação na horizontal de 3 unidades e uma translação vertical para cima, de 1 unidade, como nos mostra a Figura 44.

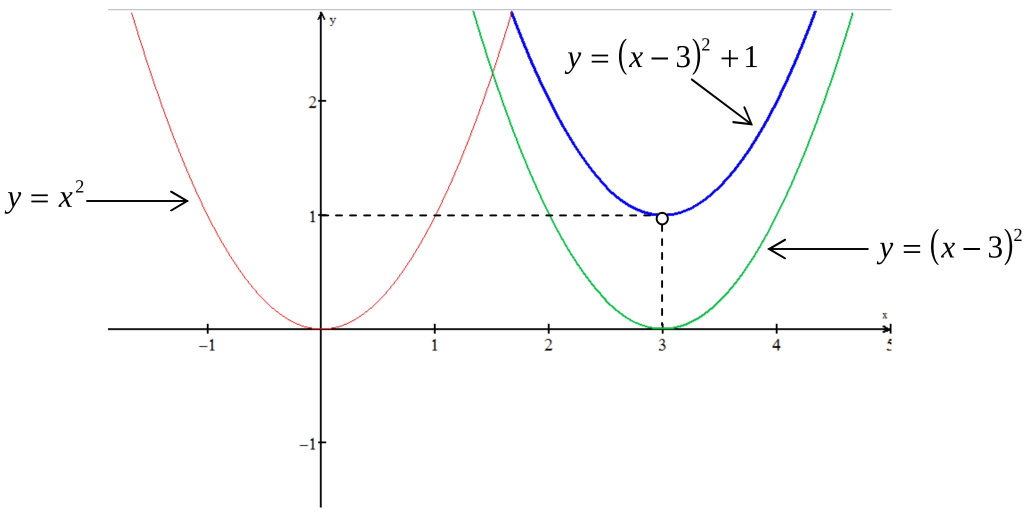


Figura 44: Traçado da função quadrática $y = x^2 - 6x + 10$ por transformação geometria a partir da função básica $y = x^2$

Quase 70% dos alunos acertaram o traçado gráfico dessa função (Tabela 32).

Tabela 32: Resultado da letra “b”

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	16	69,6%
Parcialmente correto	01	4,3%
Errado	06	26,1%
Branco	00	0%

Dos 23 alunos que realizaram o teste, apenas um optou pela utilização da tabela para o traçado da função. E do total que optaram pelo esboço utilizando as transformações geométricas, 17 obtiveram êxito na conversão.

Quanto às descrições dos alunos, pouco mais de 52% dos que realizaram a atividade relataram com precisão e detalhe os movimentos observados, como podemos averiguar na Tabela 33.

Tabela 33: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "b"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	12	52,2%
Parcialmente correto	02	8,7%
Errado	05	21,7%
Não comentou	04	17,4%

Tabela 34: Técnica aplicada na resolução da letra "b"

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Complementação do Quadrado	19	82,6%
Fórmula do Vértice	03	13,1%
Tabela	01	4,3%

Segue algumas outras observações nossas quanto à resolução dos alunos referente à questão "b":

- Os alunos ESM01, ESM11, ESM16, ESM18, ESM20 e ESM27 não mencionaram onde o gráfico intercepta o eixo y.
- O aluno ESM02 determinou corretamente a fórmula canônica da função, mas entendeu que o gráfico toca no eixo y no ponto (0,3). Possivelmente confundiu-se com a coordenada do y do vértice: $y = ax^2 + bx + c$ (forma geral) e $y = a(x-m)^2 + n$ (forma canônica). Acreditamos que o aluno confundiu o coeficiente "c" da forma geral com a coordenada "y" do vértice da forma canônica. Em seu comentário, ele afirma que o gráfico transladou 3 posições horizontalmente para cima sendo que na verdade a parábola transladou 3 pontos à direita.

- O aluno ESM03 cometeu um erro de operação básica. Utilizou a fórmula do vértice para se determinar a coordenada "y" ($y_v = -\frac{\Delta}{4a}$). Encontrou primeiramente o valor de $\Delta = -4$, mas não substituiu corretamente na fórmula $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, encontrando assim, -1 ao invés de 1. Como consequência direta, a construção do gráfico ficou comprometida.
- O aluno ESM05 comprometeu todo o seu desenvolvimento ao fazer: $y = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 10 \Rightarrow y = (x-3)^2.1 \Rightarrow y = (x-3)^2$, onde seria para somar ele multiplicou. Daqui em diante todos seus procedimentos como esboço e comentários estão corretos em relação à função $y = (x-3)^2$.
- Os alunos ESM22 e ESM23 aplicaram equivocamente à técnica para complementação do quadrado, demonstrando não terem compreendido o método. Consequentemente comprometeram todo o desenvolvimento correto do exercício. Ambos também não fizeram comentários. Vale ressaltar que mesmo havendo coincidência no desenvolvimento desse exercício, não houve qualquer possibilidade de troca de informações entre eles devido a localização de ambos na sala de aula. Segue como exemplo o desenvolvimento do aluno ESM23 (Figura 45).

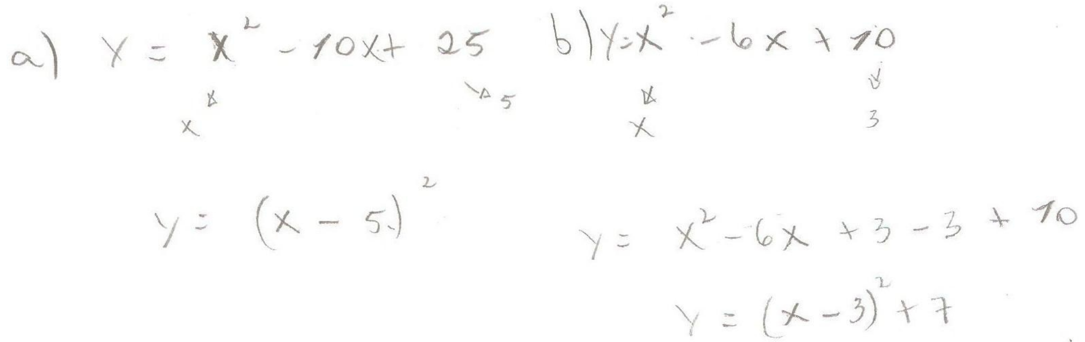


Figura 45: Desenvolvimento equivocado do método da complementação do quadrado pelo aluno ESM22

- O aluno ESM25 afirmou não saber aplicar a técnica de complementação do quadrado nem tão pouco a fórmula para se determinar o vértice da parábola. Fez o esboço do gráfico através da utilização da tabela. Conseguiu esboçar a parábola, porém, não comentou os movimentos intrínsecos a ela.
- O aluno ESM26 conseguiu converter a função da forma geral para a canônica, mas esboçou o gráfico da função equivocadamente: representou corretamente na forma $y = (x-3)^2 + 1$, contudo, na hora de esboçar, utilizou a função $y = (x-3)^2$.

- O aluno ESM28 encontrou a função na forma $y=(x-3)^2$ ao invés de $y=(x-3)^2+1$. A partir daí, realizou corretas observações, mas partindo sempre da função equivocada $y=(x-3)^2$.
- O aluno ESM29 desenvolveu a atividade corretamente, excetuando-se seu comentário que ficou incompleto. Ele afirma que o gráfico translada verticalmente e horizontalmente, mas não explicita para qual direção e sentido. Segue sua resolução na Figura 46.

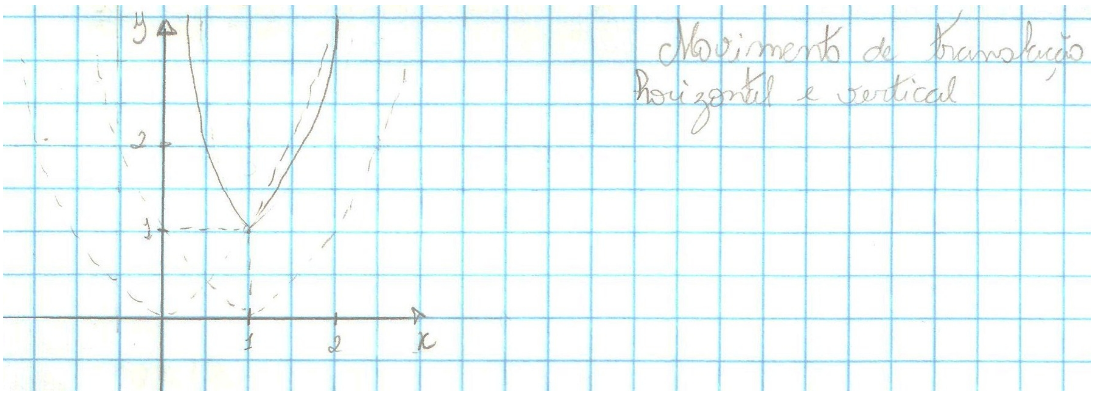


Figura 46: Comentário incompleto do aluno ESM29

A questão "c" pouco se distinguiu do anterior, a diferença ficou por conta da necessidade de fatoração da função $y=2x^2-4x+6$ antes de iniciar o processo de conversão para a forma canônica. Ficamos na expectativa de que aplicassem um dos métodos elucidados por nós durante as intervenções. Um dos procedimentos para a resolução seria:

$y=2x^2-4x+6 \longleftarrow$ Forma Geral

$y=2[(x^2-2x+3)] \longleftarrow$ Fatorando o trinômio

$y=2[(x-1)^2+2] \longleftarrow$ Aplicando a complementação do quadrado

$y=2(x-1)^2+4 \longleftarrow$ Forma canônica

Foi aplicada acima a complementação do quadrado para a conversão para a forma canônica. Neste caso, $a=2$ e a coordenada do vértice é $(1,4)$, que também poderia ter sido obtido mediante a fórmula do vértice supracitado no exercício anterior.

Desse modo, a partir do gráfico da função básica $y=x^2$, há uma translação na horizontal de 1 unidade, uma translação vertical para cima de 4 unidades e uma contração da parábola devido ao aumento do valor do coeficiente “a”. O esboço do gráfico é apresentado na Figura 47.

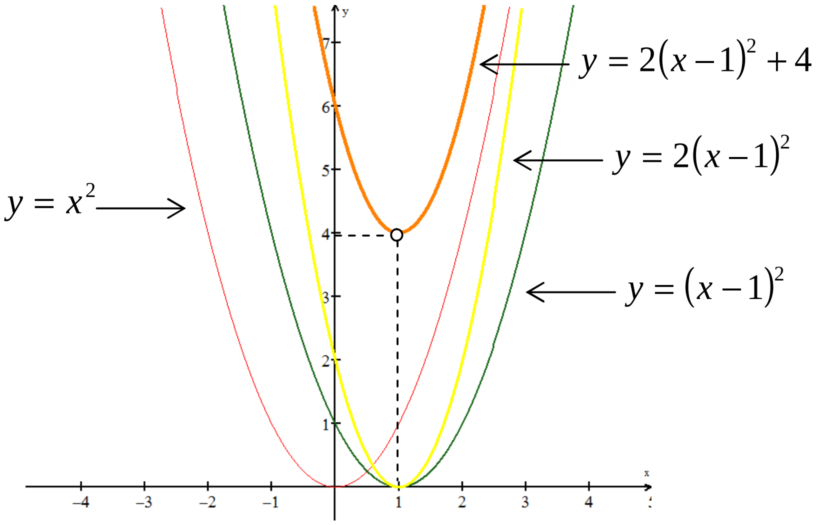


Figura 47: Traçado da função quadrática $y = 2x^2 - 4x + 6$ por transformação geometria a partir da função básica $y = x^2$

O resultado não foi satisfatório. Mais da metade dos alunos não obtiveram êxito nesta questão, como elucida a Tabela 35.

Tabela 35: Resultado da letra “c”

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	08	34,8%
Parcialmente correto	02	8,7%
Errado	10	43,5%
Branco	03	13%

No que se refere á conversão da forma geral para a canônica, dos alunos que realizaram a questão, apenas a metade destes obtiveram êxito.

Quanto às descrições dos alunos, pouco mais de 17% dos que realizaram a atividade relataram com precisão e detalhe os movimentos observados, como podemos averiguar na Tabela 36.

Tabela 36: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra "c"

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	04	17,4%
Parcialmente correto	03	13%
Errado	08	34,8%
Não comentou	08	34,8%

Realizamos o levantamento das técnicas adotadas pelos alunos na realização da conversão da forma geral para a forma canônica. Vale frisar que os alunos que optaram pelo uso da tabela não passaram pelo processo de conversão. Vide a Tabela 37.

Tabela 37: Técnica aplicada na resolução da letra "c"

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Complementação do Quadrado	09	45%
Fórmula do Vértice	10	50%
Tabela	01	5%

Segue algumas outras observações nossas quanto à resolução dos alunos referente à questão "c":

- Os alunos ESM01, ESM02, ESM05, e ESM29 não mencionaram onde o gráfico intercepta o eixo y.
- O aluno ESM02 dilatou demasiadamente seu gráfico. Foi considerado parcialmente correto.
- O aluno ESM03 equivocou-se ao determinar as coordenadas do vértice. Erro de operação.
- O aluno ESM08 errou a operação utilizada para determinar a forma canônica. Tendo a função $y = 2x^2 - 4x + 3$ ele dividiu todos os termos da expressão $2x^2 - 4x + 3$ por 2, reduzindo a função para $y = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$. Vale ressaltar que em termos de raízes os valores não se alteram, contudo o gráfico é diferente.

- O aluno ESM09 errou na operação para determinar a forma canônica. Encontrou $y = 2(x-2)^2 + 1$ ao invés de $y = 2(x-1)^2 + 1$, isto é, errou ao calcular a coordenada "x" do vértice. A partir daqui, o aluno demonstrou conhecer o procedimento para o esboço de funções através de transformações. Também relatou com coesão os movimentos ocorridos a partir da função encontrada por ele.
- O aluno ESM11 ao aplicar a fórmula do vértice encontrou corretamente o par ordenado (1,1), porém se equivocou ao substituir na fórmula canônica.
- O aluno ESM18 aplicou a técnica para complementação do quadrado para transformar a função da forma geral para a canônica. No entanto, cometeu um erro ao operar com funções (Figura 48).

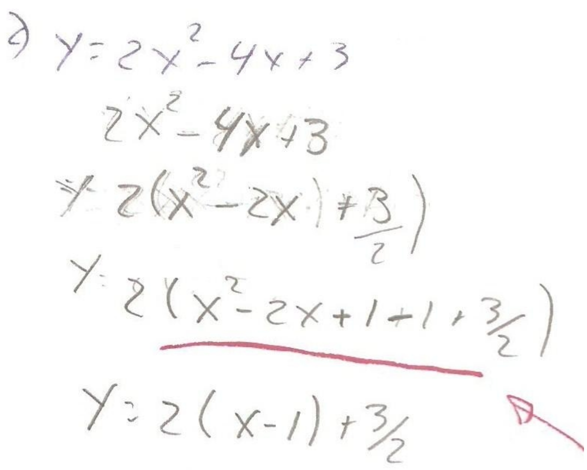


Figura 48: Desenvolvimento equivocado do aluno ESM18

- O aluno ESM19 conseguiu desenvolver até a forma $y = 2\left[(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right]$, mas não conseguiu evoluir desse ponto em diante.
- O aluno ESM20 aplicou a fórmula para determinar o vértice da parábola de forma correta, mas ao substituir os valores na forma canônica $y = a(x-m)^2 + n$ se esqueceu que o valor do coeficiente a = 2 e encontrou a função $y = (x-1)^2 + 1$.
- O aluno ESM22 desenvolveu corretamente a complementação do quadrado. Porém, quando chegou em $y = 2\left[x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{3}{2}\right]$ concluiu que $y = 2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right] \Rightarrow y = 2(x-1)^2 + \frac{3}{2}$, isto é, esqueceu de multiplicar o fator 2 pelo termo $\frac{3}{2}$.

- Os alunos ESM24 e ESM28 também erraram ao aplicar a técnica da complementação do quadrado.
- Os alunos ESM16 e ESM25 admitiram não saberem desenvolver o exercício solicitado.
- O aluno ESM27 errou ao aplicar a fórmula para se determinar o "y" do vértice.
- O aluno ESM29 fez um comentário incompleto do transcorrido com a função. Disse que o gráfico translada horizontalmente e verticalmente, mas não especifica para qual direção e sentido.

A questão "d" pouco se distinguiu do anterior, a diferença ficou por conta da necessidade de se trabalhar com frações, tópico matemático esse que os alunos têm demonstrando ter muita dificuldade fato esse que pode ser comprovado através dos testes aplicados até aqui. Ficamos na expectativa de que aplicassem um dos métodos elucidados por nós durante as intervenções. Um dos procedimentos para a resolução seria:

$$y = 3x^2 - 10x + 5 \longleftarrow \text{Forma Geral}$$

$$y = 3\left[\left(x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{5}{3}\right)\right] \longleftarrow \text{Fatorando o trinômio}$$

$$y = 3\left[\left(x - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} + \frac{5}{3}\right)\right] \longleftarrow \text{Aplicando a complementação do quadrado}$$

$$y = 3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{10}{9}\right] \longleftarrow \text{Aplicando a complementação do quadrado}$$

$$y = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \longleftarrow \text{Forma canônica}$$

Foi aplicada acima a complementação do quadrado para a conversão para a forma canônica. Neste caso, $a = 3$ e a coordenada do vértice é $\left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)$, que também poderia ter sido obtido mediante a fórmula do vértice mencionado no exercício anterior. Desse modo, a partir do gráfico da função básica $y = x^2$, há uma translação na horizontal à direita de $\frac{5}{3}$ unidades, uma translação vertical para baixo de $-\frac{10}{3}$ unidades e uma contração da parábola devido ao aumento do valor do coeficiente “a”. O esboço do gráfico é apresentado na Figura 49.

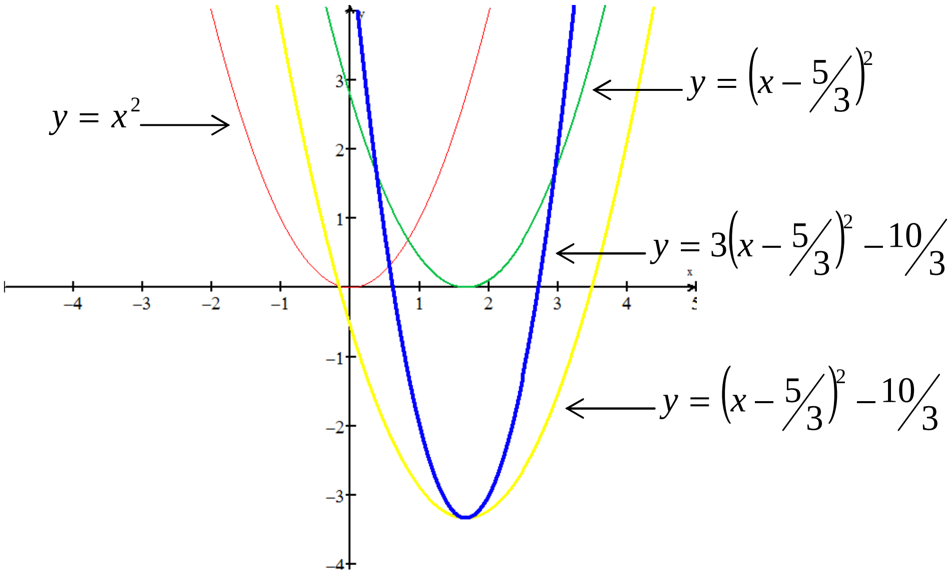


Figura 49: Traçado da função quadrática $y = 3x^2 - 10x + 5$ por transformação geometria a partir da função básica $y = x^2$

Quanto ao resultado, 43,5% dos alunos que fizeram a questão obtiveram êxito no traçado do gráfico, como podemos verificar na Tabela 38.

Tabela 38: Resultado da letra “d”

Esboço do Gráfico	Alunos	Porcentagem
Correto	10	43,5%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	08	34,8%
Branco	05	21,7%

No que se refere á conversão da forma geral para a canônica, dos alunos que realizaram a questão, 56,6% dos alunos tiveram sucesso no procedimento. O restante errou a questão ou não realizou a conversão. Quanto às descrições dos alunos, pouco mais de 34,8% dos que realizaram a atividade relataram com precisão e detalhe os movimentos observados, como podemos averiguar na Tabela 39.

Tabela 39: Resultado da descrição dos movimentos ocorridos no gráfico da letra “d”

Comentários	Alunos	Porcentagem
Correto	08	34,8%
Parcialmente correto	03	13,1%
Errado	07	30,4%
Não comentou	05	21,7%

Na Tabela 40, podemos observar que os alunos que fizeram a questão preferiram optar pela aplicação da fórmula para obter as coordenadas do vértice da parábola a complementação do quadrado. Isso se deve, muito provavelmente, pela dificuldade imposta pelo exercício no que se refere a operações que envolvem frações.

Tabela 40: Técnica aplicada na resolução da letra “d”

Técnica Aplicada	Alunos	Porcentagem
Complementação do Quadrado	04	22,2%
Fórmula do Vértice	14	77,8%
Tabela	00	0%

Obs: Na tabela “Técnica Aplicada” a porcentagem aferida está em relação ao total de alunos que fizeram a questão e não ao universo dos alunos participantes.

Segue algumas outras observações nossas quanto à resolução dos alunos referente à questão “d”:

- Os alunos ESM02, ESM18, ESM20, ESM23, ESM27 e ESM29 não mencionaram onde o gráfico intercepta o eixo y.
- Os alunos ESM01, ESM11 e ESM29 não mencionaram em seus comentários a “contração” ocorrida na concavidade da parábola quando aumentamos o coeficiente “a”.
- Os alunos ESM03 e ESM08 erraram em operações básicas ao converter a função da forma geral para a forma canônica.

- Os alunos ESM07 e ESM09 erraram na simplificação da fração: ao simplificarem a fração $-40/12$ encontraram $-4/3$ no momento em que estavam determinando o valor do "y" do vértice.
- O aluno ESM16 admitiu não saber resolver o exercício.
- Os alunos ESM19, ESM26 e ESM28 afirmaram não saber aplicar a técnica de complementação do quadrado nos casos em que se necessita operar com as frações.
- O aluno ESM21 conseguiu converter a função da forma geral para a canônica utilizando a fórmula do vértice. Porém, ao esboçar o gráfico se confundiu ao determinar o "y" do vértice. Ela marcou a coordenada $10/3$ para o "y" do vértice onde na verdade o valor correto seria seu oposto, $-10/3$.
- O aluno ESM22 conseguiu transformar a função da forma geral para $y = 3\left[\left(x - 5/3\right)^2 - 10/9\right]$. Apenas se esqueceu de multiplicar o fato 3 pelos termos dentro do colchete. Acreditamos que o fato ocorreu por mera distração. Demonstrou, no entanto, ter adquirido certo domínio da técnica de complementação do quadrado partindo do princípio que o desenvolvimento mais "árduo" foi realizado com sucesso.
- O aluno ESM29 fez um comentário incompleto do transcorrido com a função. Disse que o gráfico translada horizontalmente e verticalmente, mas não especifica para qual direção e sentido.
- Ficou evidenciada a grande dificuldade dos alunos em operar com as frações na medida em que recorrem com grande freqüência à utilização da fórmula do vértice para determinarem a função canônica. De forma geral, constatamos uma grande evolução dos alunos participantes principalmente no que tange a complementação de quadrado com números inteiros.
- Durante as aulas expositivas sobre esse conteúdo, a grande maioria dos alunos requisitou mais aulas sobre esse tópico sob a alegação de compreenderem sua importância para o esboço de gráficos de funções e pelo fato de nunca terem visto tais métodos no ensino básico.
- Nas questões "c" e "d", a maioria dos alunos se esqueceu de registrar em suas observações a transformação ocorrida no gráfico quando o coeficiente "a" varia. Ambos ficam muito "presos" aos movimentos rígidos dos gráficos como se fossem os únicos.

4.4. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE APLICAÇÕES DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

Este teste foi composto por 4 questões referentes às aplicações de funções afins e quadráticas (APÊNDICE F) objetivando medir o nível de compreensão dos alunos após nossa intervenção em sala de aula. As atividades foram feitas individualmente e sem consulta a materiais didáticos. Participaram desse teste 24 alunos.

O objetivo da questão 1 era averiguar o nível de compreensão dos alunos quanto à relação fórmula e gráfico. Deveriam fazer o processo inverso do que vinham realizando até aqui. Dado o gráfico, foi pedido para que determinassem a fórmula da função. Durante as aulas, foram apresentados dois métodos resolutivos: o analítico, onde já disseram ter estudado e o geométrico, que segundo eles, nunca haviam aprendido no ensino básico. O desempenho dos alunos no que se refere à questão 1 pode ser visto com detalhes na Tabela 41.

Tabela 41: Resultado da questão 1 relativo ao teste de verificação sobre aplicação de funções afins e quadráticas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	17	70,8%
Parcialmente correto	03	12,5%
Errado	03	12,5%
Branco	01	4,2%

Para a resolução dessa questão, optamos por deixar facultativa a técnica a ser aplicada por eles na resolução da questão. Pudemos constatar que, dos 23 alunos que responderam a questão, 12 aplicaram o método analítico e 11 deles o método geométrico, até então desconhecido por todos os alunos participantes.

Vale ressaltar que a grande maioria dos alunos que erraram ou acertaram parcialmente a questão, utilizaram o método analítico para encontrar a lei de associação, demonstrando assim, que os alunos assimilaram o método geométrico para se determinar a função dado o seu gráfico. Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão:

- O aluno ESM16 tentou solucionar o problema aplicando o método geométrico. Demonstrou desconhecer tal método. Aferiu como resposta: $y = 3x + 5$. Confundiu a raiz do gráfico com o coeficiente “a”.
- Os alunos ESM26, ESM11, ESM01 e ESM07 optaram por aplicar o método analítico para a obtenção da lei de associação. Determinaram os pontos onde o gráfico intercepta os eixos ortogonais, determinaram corretamente o coeficiente “b” da função, mas não acertou o coeficiente “a”, pois substituíram, de forma equivocada, as coordenadas (3,0) na equação $y = ax + 5$ como podemos observar abaixo na Figura 50:

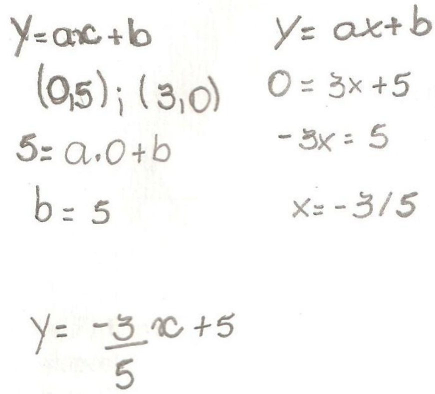


Figura 50: Desenvolvimento do aluno ESM26

- O aluno ESM08 encontrou corretamente a função afim aplicando os dois métodos (analítico e geométrico). Acredito que a aplicação do método analítico se deu com o propósito de confirmar o resultado obtido a partir do método geométrico, conforme podemos observar abaixo na Figura 51.

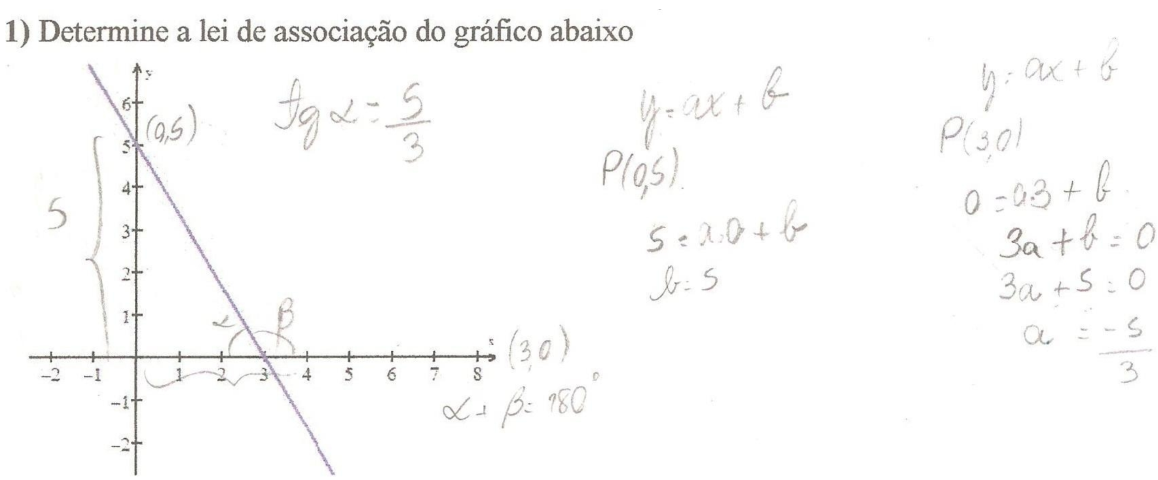


Figura 51: Resolução correta do aluno ESM08

A questão 2 foi considerado de nível fácil, onde bastava ao aluno identificar nas propostas das locadoras o valor que representava a constante e o valor que deveria ser multiplicado pelo número de quilômetros percorridos. Esperava-se que os mesmos formulassem a lei de associação de ambas as propostas. Haveria a possibilidade de se resolver o problema sem a necessidade de deduzir tais fórmulas.

Como podemos verificar na Tabela 42, apenas um aluno não acertou a questão e todos deduziram as funções que modelam as propostas das locadoras mencionadas no problema.

Tabela 42: Resultado da questão 2 relativo ao teste de verificação sobre aplicação de funções afins e quadráticas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	23	95,8%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	01	4,2%
Branco	00	0,0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão:

- 4 alunos não formularam a resposta do problema. Através desse fato, observa-se a grande dificuldade destes em solucionar problemas que exigem uma leitura mais apurada.
- O aluno ESM27 errou ao calcular 1400 + 1050 = 2050.

A questão 3 se tratava de um problema tradicional referente à aplicação do conceito de funções quadrática onde o objetivo é determinar o vértice da parábola. Esperávamos com esta questão, além de verificar o nível de compreensão dos mesmos em relação à aplicabilidade da função quadrática, observar os métodos utilizados por eles na obtenção dos valores procurados, como por exemplo, se utilizaram a fórmula do vértice ou se encontraram essas coordenadas por simples análise gráfica.

Mesmo sendo facultativos as técnicas ou métodos aplicados na resolução da questão por parte dos alunos, contatamos que dos 23 alunos que resolveram a questão, apenas um não esboçou o gráfico da função quadrática. O resultado da questão encontra-se na Tabela 43.

Tabela 43: Resultado da questão 3 relativo ao teste de verificação sobre aplicação de funções afins e quadráticas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	15	62,5%
Parcialmente correto	04	16,6%
Errado	04	16,6%
Branco	01	4,3%

Procuram analisar o resultado do gráfico construído pelos alunos que responderam a questão. Conforme podemos ver na Tabela 44, dos 23 alunos que esboçaram o gráfico, 14 obtiveram êxito em suas construções.

Tabela 44: Número de alunos que esboçaram corretamente o gráfico da função

Esboçou corretamente o gráfico?	Alunos	Porcentagem
Sim	14	60,9%
Não	05	21,7%
Incompleto	04	17,4%

Quanto aos métodos utilizados por eles para a construção do gráfico, buscamos averiguar se o aluno aplicou tão somente as fórmulas para a obtenção dos elementos constituintes da função como raiz e vértice, se procurou realizar o esboço do gráfico ou se os aplicaram concomitantemente. O resultado pode ser observado na Tabela 45.

Tabela 45: Método aplicado para encontrar o gráfico da função

Método Aplicado para encontrar o gráfico	Alunos	Porcentagem
Usou apenas a fórmula	02	8,7%
Usou apenas o esboço do gráfico	01	4,4%
Usou os dois métodos	20	86,9%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão:

- O aluno ESM03 aplicou a fórmula para se determinar o “a” do vértice equivocadamente. Utilizou a seguinte relação para encontrar o “x” do vértice: $x_v = -b/a$, encontrou assim um valor diferente do esperado.
- Os alunos ESM28 (Figura 52) e ESM26 esboçaram o gráfico corretamente, mas não compreenderam que o “x” do vértice representa, nesse caso específico, o tempo em que a bala atingia a altura máxima. Confundiu a raiz com o tempo. No entanto, encontrou corretamente a altura máxima atingida pela bala através da fórmula $y_v = -\Delta/4a$. Sua resposta foi considerada parcialmente correta.

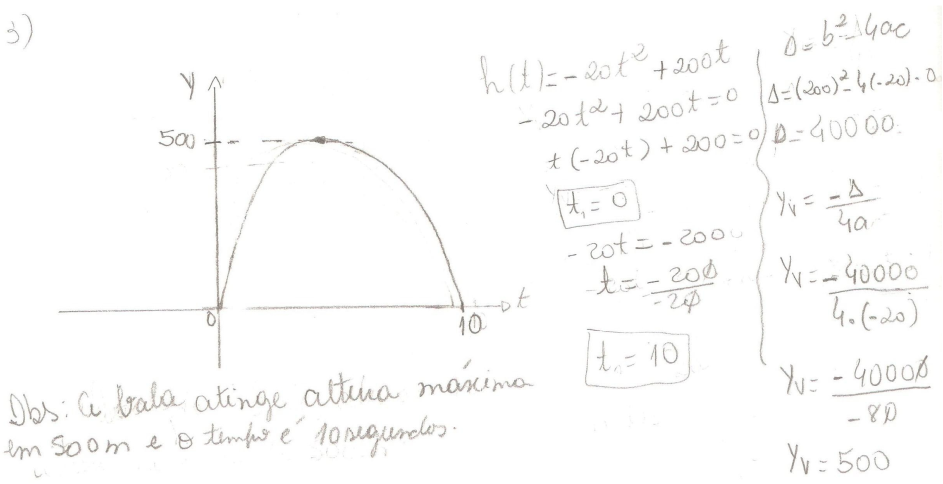


Figura 52: Desenvolvimento do aluno ESM28

- O aluno ESM24 esboçou o gráfico, encontrou os valores das raízes e o “x” do vértice. Contudo, cometeu um erro de cálculo ao aplicar a fórmula para se chegar ao valor máximo da parábola, isto é, a altura máxima atingida pela bala;
- O aluno ESM04 tentou encontrar as coordenadas do vértice transformando a função da forma geral para a forma canônica. No entanto, equivocou-se ao determinar o “y” do vértice.
- O aluno ESM27 cometeu um erro de cálculo ao determinar o vértice da parábola. Encontrou um valor máximo da função negativa, e por isso, concluiu que a função quadrática em questão se tratava de uma função cuja concavidade era voltada para cima.

Como já havíamos comentado em análises anteriores, fica nítida a pouca atenção dada pelos alunos aos exercícios contextualizados. Apenas 8 alunos, do 24 participantes, formularam uma resposta descritiva para o problema.

Com a questão 4, esperávamos verificar o nível de compreensão dos mesmos em relação à aplicabilidade da função quadrática, observar os métodos utilizados por eles e se esboçaram ou não o gráfico. Julgamos o resultado insatisfatório. Atribuímos o insucesso ao fato dos alunos nunca terem aplicado os conceitos de função quadrática para esse tipo de problema juntamente com os poucos exercícios propostos por nós similares a esse problema e a grande dificuldade encontrada pelos alunos na visualização gráfica nessa situação-problema. Dos 18 alunos que responderam a questão 4 (não importando estar ou não correta), apenas 3 esboçaram o gráfico da função. Conforme podemos verificar na Tabela 46, apenas 9, dos 24 alunos que participaram do teste, responderam a questão 4.

Tabela 46: Resultado da questão 4 relativo ao teste de verificação sobre aplicação de funções afins e quadráticas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	09	70,8%
Parcialmente correto	00	12,5%
Errado	09	12,5%
Branco	06	4,2%

4.5. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES MODULARES

Findada as intervenções referentes ao esboço de gráficos de funções modulares através de transformações geométricas, aplicamos um pequeno teste de verificação contendo um único enunciado solicitando para que esboçassem os gráficos das funções $y = |x-3| + 2$ e $y = |x^2 - 3|$ e descrevessem os procedimentos por eles adotados (APÊNDICE G).

Esperávamos com esses exercícios, verificar o nível de compreensão dos alunos acerca de esboço de funções modulares através de transformações geométricas. Feita a análise dos dados, constatamos que 13 dos 24 alunos acertaram todas as questões. O restante dos resultados se encontra na Tabela 47.

Tabela 47: Resultado da questão única referente às transformações geométricas e funções modulares

Resultado	Alunos	Porcentagem
Acertou apenas a primeira função	03	12,5%
Acertou apenas a segunda função	05	20,8%
Acertou todas as funções	13	54,2%
Errou todas as funções	02	8,3%
Branco	01	4,2%

Na Figura 53 podemos visualizar a correta resolução do aluno ESM12 referente ao exercício da letra “a”.

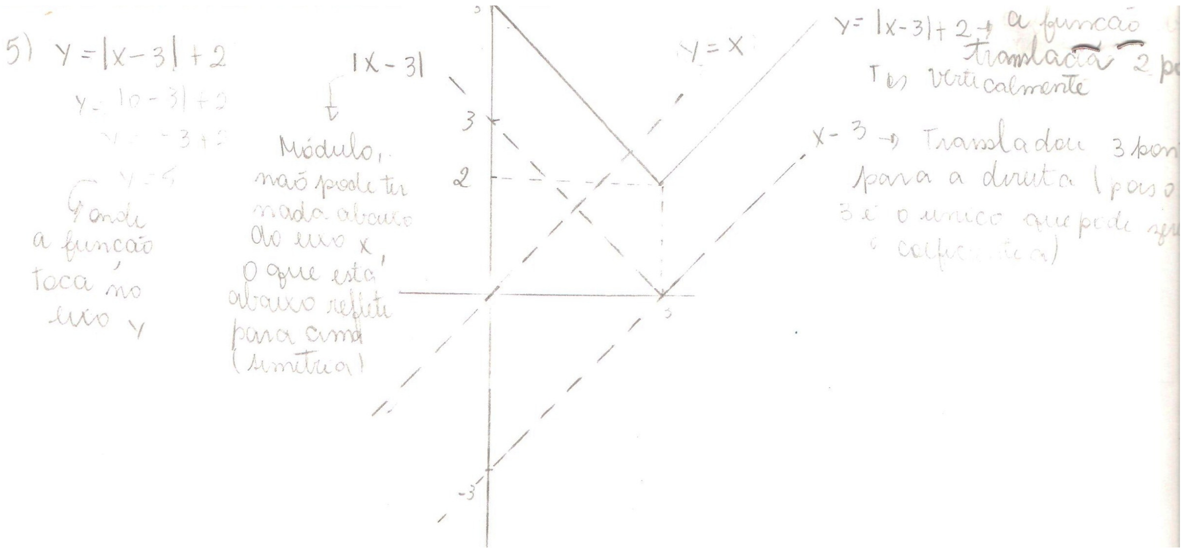


Figura 53: Desenvolvimento correto do esboço gráfico da função $y = |x - 3| + 2$ pelo aluno ESM12

4.6. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS OCORRIDAS NO GRÁFICO DA FUNÇÃO $y = a^x$ QUANDO VARIAMOS A BASE “a”

Findada as aulas relativas ao traçado e aplicação de funções exponenciais, propomos uma atividade investigativa com o uso de um *software* matemático que ao mesmo tempo nos serviria como um teste de verificação. Esta atividade (APÊNDICE K) teve o objetivo de propiciar aos alunos a possibilidade de investigar, visualizar os movimentos ocorridos na função exponencial $y = a^x$ e oportunizar aos mesmos o acesso a recursos tecnológicos.

Os alunos tiveram como ferramenta de auxílio, além dos vídeos tutoriais referentes ao traçado de gráficos de funções diversas, um *applet* da função em questão (Figura 54), criado pelo *software Geogebra* onde poderiam modificar o seletor e analisarem em equipe.

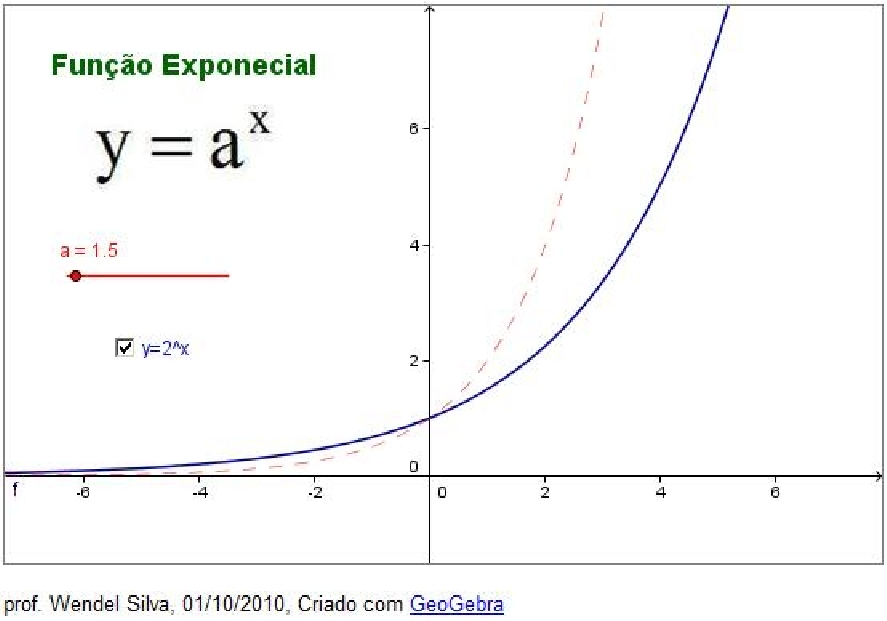


Figura 54: ***Applet*** **da função exponencial construída no** ***Geogebra***

Essa dinâmica ocorreu no laboratório de informática da própria faculdade onde se encontram 10 microcomputadores, com acesso à *Internet* banda larga, quadro-branco e *datashow*. Participaram desse teste 23 alunos que foram divididos em equipes como mostra o Quadro 1.

EQUIPES	**EQUIPE 1 – ESM12, ESM25 e ESM26**
	EQUIPE 2 – ESM05 e ESM29
	EQUIPE 3 – ESM11 e ESM17
	EQUIPE 4 – ESM07, ESM21 e ESM23
	EQUIPE 5 – ESM02 e ESM03
	EQUIPE 6 – ESM18 e ESM24
	EQUIPE 7 – ESM09 e ESM16
	EQUIPE 8 – ESM04 e ESM19
	EQUIPE 9 – ESM14, ESM20 e ESM28
	EQUIPE 10 – ESM22 e ESM27

Quadro 1: Distribuição dos alunos em Equipes de 2 ou 3 alunos.

Com os alunos já dispostos em equipe de dois ou três, foi distribuída uma folha de atividades (APÊNDICE K) contendo a definição de função exponencial e cinco questões referentes às transformações ocorridas na função $y = a^x$. Os alunos apenas poderiam se comunicar entre os integrantes da própria equipe.

Com o *software* aberto, foi pedido para que cada equipe digitasse a função $y = a^x$ e abrisse, logo em seguida, a janela “valor usual de a” onde poderiam variar o parâmetro “a”.

Nesse momento, observamos que grande parte dos participantes conseguiu inserir corretamente a função, sem a devida orientação, ficando claro com isso, terem assistido aos vídeos tutoriais e de terem instalado e manuseado o *software* fora da instituição.

Esperávamos, com a questão 1 que os alunos observassem os movimentos ocorridos no gráfico da função $y = a^x$ ao variar a base "a" tais como: interseção do gráfico com os eixos ortogonais, monotonicidade e, possivelmente, o domínio e imagem.

Conforme nos mostra a Tabela 48, 7 equipes descreveram corretamente os movimentos ocorridos com o gráfico.

Tabela 48: Resultado da questão 1 da atividade no laboratório de informática sobre funções exponenciais

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	07	70%
Parcialmente correto	03	30%
Errado	00	0%
Branco	00	0%

Procuramos fazer o levantamento dos elementos descritos pelas equipes durante a atividade investigativa com o uso do *software Winplot*, como nos mostra a Tabela 49.

Tabela 49: Observações dos alunos relativos aos movimentos do gráfico da questão 1

Observações Relatadas	Alunos	Porcentagem
Aproximação do gráfico resultante com o eixo y.	07	70%
Aproximação do gráfico resultante com o eixo x.	03	30%
Monotonicidade	04	40%
Domínio e Imagem	00	0%

OBS**:** Na tabela referente às Observações Relatadas pelas equipes, por muitas vezes, a mesma equipe destacou vários comportamentos intrínsecos aos gráficos de funções ao variar a base "a".

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 1:

Os integrantes da Equipe 3 recordaram das aulas expositivas no início do projeto quando foi explanado sobre os movimentos que ocorrem no gráfico da função quando variamos os coeficientes das funções, ao afirmarem que tal movimento da função $y = a^x$, não se trata de um movimento rígido (Figura 55).

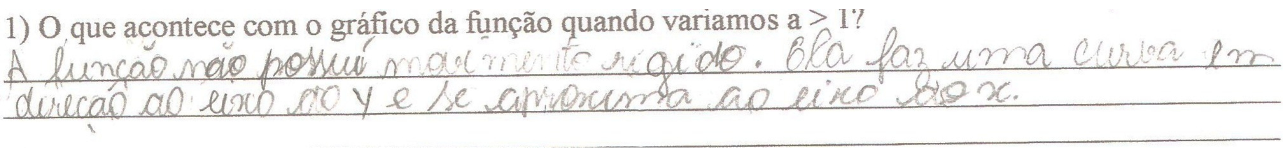

1) O que acontece com o gráfico da função quando variamos a > 1?
A função não possui movimento rígido. Ela faz uma curva em direção ao eixo do y e se aproxima ao eixo do x.

Figura 55: Observação da Equipe 3 referente à questão 1

Segundo a Equipe 5 (Figura 56), quando temos a > 1, a função deixa de ser constante para se tornar uma função exponencial. Na verdade, temos uma função constante APENAS quando a = 1.

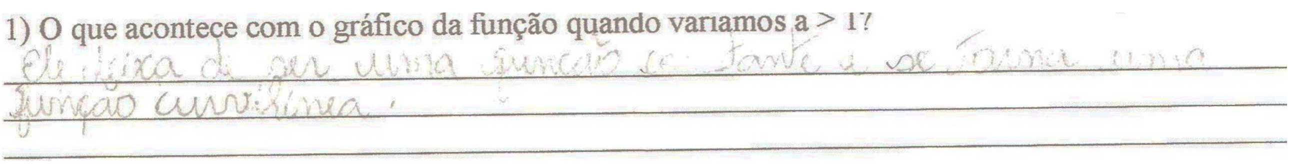

1) O que acontece com o gráfico da função quando variamos a > 1?
Ele deixa de ser uma função constante e se torna uma função curvilínea.

Figura 56: Observação da Equipe 5 referente à questão 1

A Equipe 7 afirma que, ao aumentarmos positivamente os valores do coeficiente “a”, é possível observar uma “contração” da “parábola” do lado positivo, tendendo ao eixo y. O equívoco aqui foi denominar a curva do gráfico da função exponencial de parábola. Suponho que o “lado positivo” da qual se refere à equipe, seja o primeiro quadrante do plano cartesiano.

A Equipe 10 afirmou que à medida que o coeficiente “a” se torna maior que 1, o gráfico da função se curva para o eixo do “y” sem encostar. No fim, lançou a seguinte indagação: Por que isso ocorre?

Esperávamos com a questão 2 que os alunos observassem os movimentos ocorridos no gráfico da função ao variar a base “a” no intervalo 0 < a < 1, tais como: interseção do gráfico com os eixos ortogonais, monotonicidade e, possivelmente, o domínio e imagem. Além dessas características, esperávamos que os mesmos notassem a relação de simetria entre algumas funções como $y = 2^x$ e $y = {\frac{1}{2}}^{x}$, por exemplo. O resultado detalhado por ser visualizado logo em seguida na Tabela 50.

Tabela 50: Resultado da questão 2 da atividade no laboratório de informática sobre funções exponenciais

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	05	50%
Parcialmente correto	04	40%
Errado	01	10%
Branco	00	0%

A Tabela 51 detalha os elementos descritos pelos alunos durante a realização da questão 2.

Tabela 51: Observações dos alunos relativos aos movimentos do gráfico da questão 2

Observações Relatadas	Alunos	Porcentagem
Aproximação do gráfico resultante com o eixo y.	06	60%
Aproximação do gráfico resultante com o eixo x.	02	20%
Monotonicidade	04	40%
Domínio e Imagem	00	0%
Simetria em relação ao eixo y	02	20%

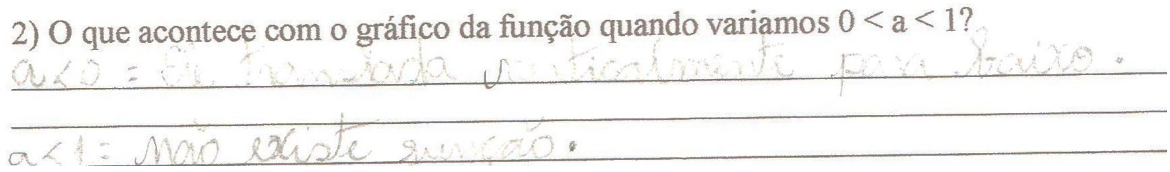
OBS**:** Na tabela referente às Observações Relatadas pelas equipes, por muitas vezes, a mesma equipe destacou vários comportamentos intrínsecos aos gráficos de funções ao variar a base "a".

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 2:

A Equipe 1 conseguiu perceber a simetria existente entre as funções como $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Em suas observações, a Equipe 2 constatou que o gráfico "tende ao eixo x positivo", afastando-se do eixo y ao aumentar os valores de "a" compreendidos no intervalo 0 < a < 1. No entanto, o equívoco se deu ao afirmar que o gráfico tende ao eixo x, o que na verdade, nesse caso, é o contrário, afasta-se.

Quanto as observações da Equipe 5 (Figura 57) foram consideradas equivocadas. A equipe afirma que quando a < 0, o gráfico translada verticalmente para baixo e quando a < 1, não existe função.



2) O que acontece com o gráfico da função quando variamos 0 < a < 1?

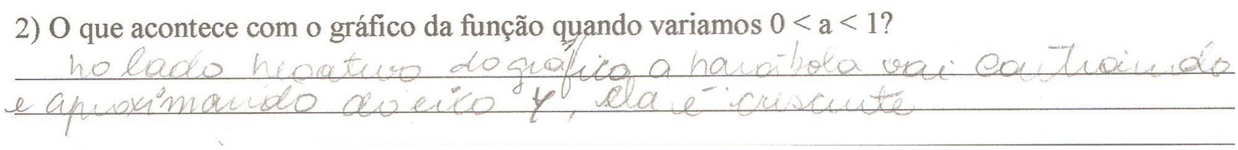
a<0 = Ele transladada verticalmente para baixo.

a<1 = Não existe função.

Figura 57: Observação da Equipe 5 referente à questão 2

Consideramos as observações da Equipe 6 “Parcialmente Corretas”, pois apenas descreveram a simetria que ocorre entre os valores compreendidos no intervalo 0 < a < 1 e a > 1, em relação ao eixo y. No entanto, não descreveram outros movimentos que ocorrem.

A Equipe 7 (Figura 58) afirmou que do lado “negativo do gráfico” (suponho que se referem ao 2º quadrante), a “parábola” (seria curva) vai se “contraindo” e aproximando do eixo y. Eles afirmam ainda que a função é crescente (na verdade é decrescente).



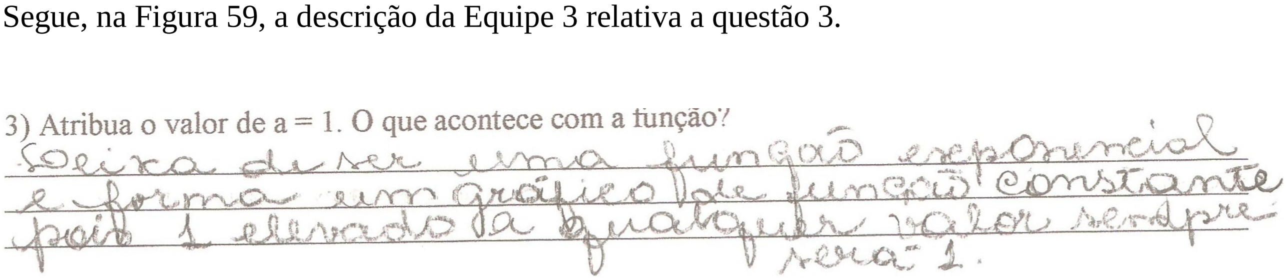
2) O que acontece com o gráfico da função quando variamos 0 < a < 1?

no lado negativo do gráfico a parábola vai contraindo e aproximando do eixo y, ela é crescente

Figura 58: Observação da Equipe 7 referente á questão 2

O parecer da Equipe 10 foi considerada “Parcialmente Correta”. Afirmam que quando o coeficiente “a” é zero, o gráfico da função é uma reta coincidente com o eixo x. No entanto, não conseguiram constatar que, por exemplo, $y = 0^0$ e $y = 0^{-1}$ são indeterminações.

Com a questão 3, esperávamos que os alunos observassem que quando a = 1 a função deixa de ser exponencial e se torna uma função constante. Como já era de se esperar, todos os alunos obtiveram êxito em suas observações. Não houve nenhuma dificuldade fato esse que atribuído ao auxílio do *software Winplot* auxiliando, de forma considerável, na visualização. Segue, na Figura 59, a descrição da Equipe 3 relativa a questão 3.



3) Atribua o valor de a = 1. O que acontece com a função?

Deixa de ser uma função exponencial e forma um gráfico de função constante pois 1 elevado a qualquer valor sempre será 1.

Figura 59: Observação correta da Equipe 6 referente á questão 3

Na questão 4, primeiramente solicitamos as equipes que esboçassem no *Winplot* uma função exponencial onde a base “a” fosse negativa e relatassem suas observações.

Esperávamos com esta questão, que os alunos utilizassem o lápis e o papel para tentarem encontrar um exemplo que negasse a afirmação de que seria possível uma base negativa. Para tal, bastaria citar algum exemplo em que o expoente dessa base negativa fosse uma fração com o denominador par. Ex: $y = (-2)^{1/2}$ que, transformando para radical, seria $y = \sqrt{-2}$ o que seria impossível dentro dos conjuntos dos números reais.

Os alunos encontraram muita dificuldade na resolução desta questão. Apenas 2 equipes conseguiram acertar a questão, como podemos averiguar na Tabela 52.

Tabela 52: Resultado da questão 4 da atividade no laboratório de informática sobre funções exponenciais

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	02	20%
Parcialmente correto	05	50%
Errado	03	30%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 4:

A Equipe 1 afirmou que neste caso não se caracteriza uma função pelo fato de haver casos em que há duas imagens para um único valor de x. Foi considerado “Parcialmente Correto”. Já as Equipes 2, 6 (Figura 60) e 10, justificaram afirmando que não se caracteriza uma função pelo fato dos pares ordenados, quando marcados no plano, estarem de forma aleatória, não formando uma curva.

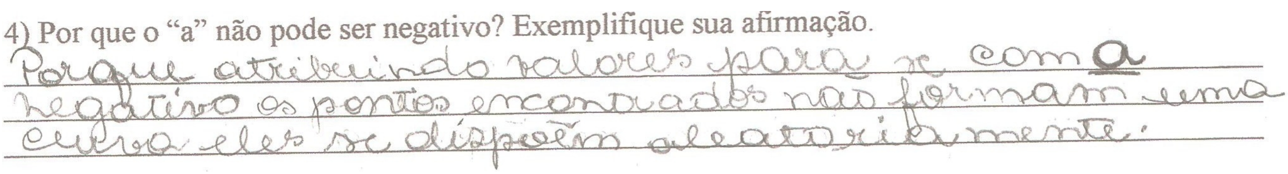

4) Por que o “a” não pode ser negativo? Exemplifique sua afirmação.
Porque atribuindo valores para x com a negativo os pontos encontrados não formam uma curva eles se dispoem aleatoriamente.

Figura 60: Observação da Equipe 6 referente à questão 4

As Equipes 3 e 5 Simplesmente justificaram afirmando que o gráfico não se caracteriza uma curva não explicitando nenhum outro detalhe sobre a situação observada. A Equipe 4 não justificou. Apenas afirmou não se caracterizar uma função exponencial e marcaram alguns pontos no plano cartesiano para ilustra sua afirmação, como mostra a Figura 61.

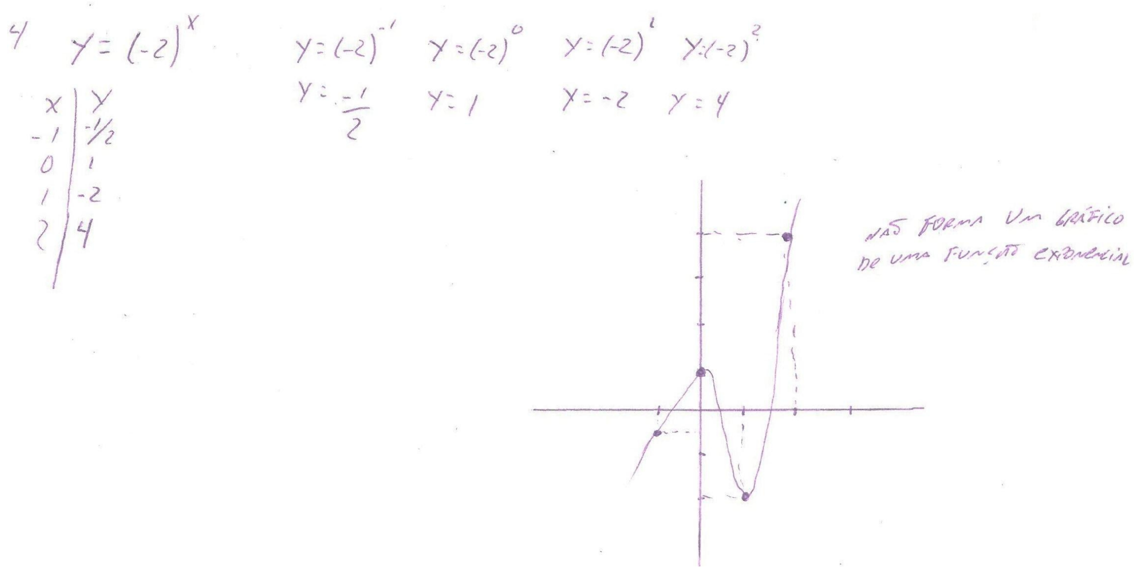


Figura 61: Observação da Equipe 4 referente á questão 4

A Equipe 8 chamou equivocadamente o coeficiente “a” de coeficiente angular e concluiu não se tratar de uma função exponencial baseando-se na tentativa frustrada de esboçar o gráfico utilizando tabela. A Equipe 9 apenas afirmou não se tratar de uma função exponencial e marcou alguns pontos no plano cartesiano como forma de exemplificar sua justificativa.

Todos os alunos tentaram, de alguma forma, provar por negação a possibilidade da existência da função exponencial com base negativa através da utilização da tabela para encontrar os pontos. No entanto, ao adotar valores apenas inteiros para o domínio, não foi possível encontrar uma imagem que não existisse. Contudo, conseguiu constatar a negação visualmente percebendo que os pontos marcados não se caracterizavam uma curva. Todos os alunos utilizaram tabela para determinar os pontos referidos acima.

Na Questão 5, seu objetivo era de instigar os alunos a analisarem outras características inerentes a variação da base “a” na função exponencial $y = a^x$ que não foram questionados acima. Esperávamos que os participantes mencionassem outros elementos como: monotonicidade, domínio e imagem, relação do gráfico com os eixos ortogonais e a característica curva do gráfico da função. Segue abaixo na Tabela 53 o resultado da questão 5.

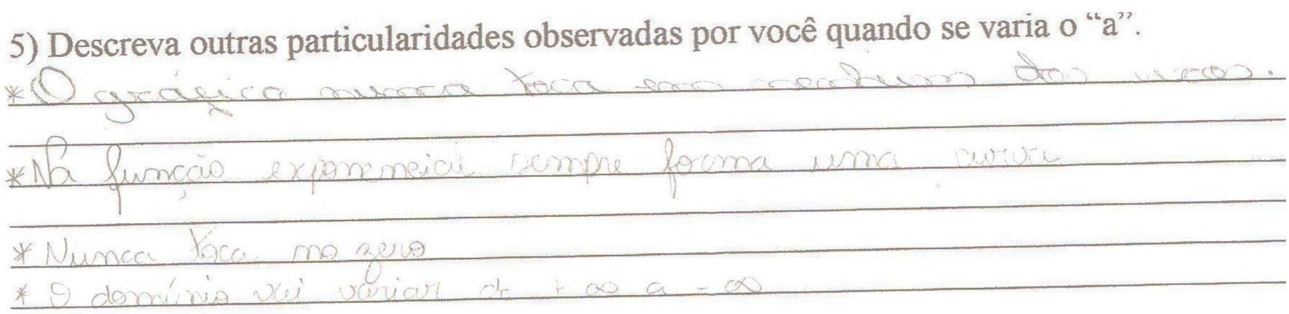
Tabela 53: Observações dos alunos relativos aos movimentos do gráfico da questão 5

Comentários	Alunos	Porcentagem
Domínio e Imagem	06	60%
Monotonicidade	02	20%
Relação do gráfico com os eixos ortogonais	08	80%
Gráfico da função	01	10%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 5:

Em sua análise, a Equipe 1 observou que o domínio será sempre R, o gráfico da função nunca irá "encostar" no eixo x, pois $2^x \neq 0$.

A Equipe 2 (Figura 62) afirmou que o gráfico nunca toca nos eixos ortogonais. (A equipe se esqueceu que a curva intercepta o eixo y quando temos x = 0). Observou que a função exponencial sempre resulta em uma curva e que o domínio será sempre real.


5) Descreva outras particularidades observadas por você quando se varia o "a".

* O gráfico nunca toca em nenhum dos eixos.

* Na função exponencial sempre forma uma curva

* Nunca toca no zero

* O domínio vai variar de $+\infty$ a $-\infty$

Figura 62: Observação da Equipe 2 referente à questão 5

A Equipe 5 afirmou que quando temos $a \leq 0$, não existe a função. A Equipe 6 argumenta que aumentando-se o valor da base "a", o valor de "y" aumenta mais rapidamente e a Equipe 10 observou que o gráfico da função nunca "ultrapassa" o eixo x.

Alguns equívocos relativos à resposta da questão 5 destacados por nós:

- "A <u>função</u> nunca toca no eixo x". Nesse caso o aluno ou a equipe se refere ao gráfico da função. Pensam que função e gráfico são sinônimos.
- Alguns alunos não sabem analisar a monotonicidade da função exponencial. Tem muita dificuldade em distinguir quando ela é crescente ou decrescente.

- Confundem com freqüência a parábola com uma curva qualquer. Para eles, qualquer curva se trata de uma parábola.

4.7. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS OCORRIDAS NO GRÁFICO DA FUNÇÃO $y = a\ln(x+b)+c$ COM O AUXÍLIO DO *WINPLOT*

Esta atividade (APÊNDICE M) foi realizada com 23 alunos distribuídos em 11 equipes composta de dois ou três membros, como mostra o Quadro 2:

EQUIPES	**EQUIPE 1 – ESM19 e ESM04**
	EQUIPE 2 – ESM14 e ESM01
	EQUIPE 3 – ESM11 e ESM22
	EQUIPE 4 – ESM03 e ESM16
	EQUIPE 5 – ESM28 e ESM20
	EQUIPE 6 – ESM09 e ESM29
	EQUIPE 7 – ESM25 e ESM26
	EQUIPE 8 – ESM18 e ESM24
	EQUIPE 9 – ESM12 e ESM02
	EQUIPE 10 – ESM05, ESM27 e ESM10
	EQUIPE 11 – ESM23 e ESM21

Quadro 2: Distribuição dos alunos em Equipes de 2 ou 3 alunos

O objetivo dessa atividade era a de propiciar aos alunos a possibilidade de investigar e visualizar os movimentos ocorridos na função exponencial $y = a\ln(x+b)+c$, onde os parâmetros “a”, “b” e “c” variam. A partir das aulas presenciais ministradas sobre o assunto em questão, os alunos tiveram como ferramenta de auxílio um objeto de aprendizagem, um *applet* da função em questão (Figura 63), criado pelo *software Geogebra* onde poderiam modificar os seletores e analisarem, individualmente em seus respectivos computadores, o comportamento dessa função logarítmica ao movimentarem um dos coeficientes, mantendo os outros dois constantes.

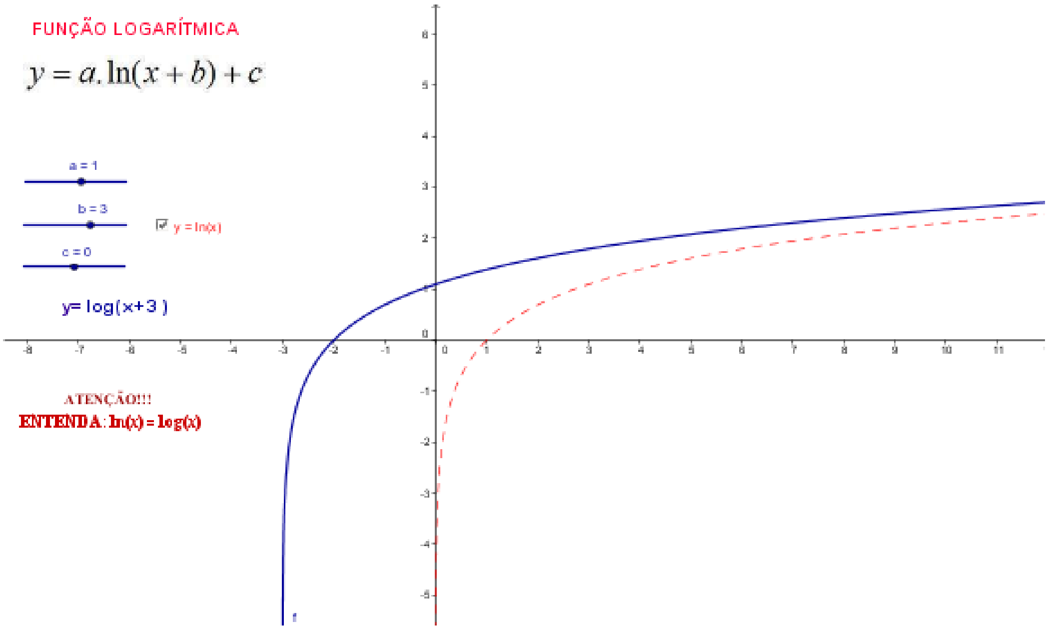


Figura 63: ***Applet*** **sobre função logarítmica construído no** ***software Geogebra***

Com os alunos já dispostos em equipes de dois ou três, foi distribuída uma folha de atividades contendo a definição de função logarítmica e 6 questões referentes às transformações ocorridas na função $y = a\ln(x+b)+c$. Os alunos apenas poderiam se comunicar entre os integrantes da própria equipe.

Com o *software Winplot* aberto, foi solicitado para que cada equipe plotasse a função $y = \ln x$, que os auxiliaram nas respostas referentes às três primeiras perguntas da atividade. Essa função também serviu como um norte para a análise das transformações ocorridas no plano.

Com a questão 1, esperávamos que os alunos, ao observarem os movimentos ocorridos no gráfico da função $y = \ln(x+b)$ ao variar o parâmetro "b" em comparação com a função básica $y = \ln x$, e descrevessem o movimento rígido de translação horizontal. Das 11 equipes participantes, 6 obtiveram êxito como podemos averiguar na Tabela 54.

Tabela 54: Resultado da questão 1 da atividade no laboratório de informática sobre funções logarítmicas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	06	54,5%
Parcialmente correto	02	18,2%
Errado	03	27,3%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 1:

A Equipe 1 (Figura 64) apenas descreve o comportamento do gráfico da função quando há um acréscimo de valores do coeficiente “b”. Mesmo considerando incompleta a analogia da equipe, ficou claro o entendimento por parte da equipe quanto ao movimento ocorrido no gráfico.

1) Plote a função $y = \ln(x + b)$. Varie o coeficiente “b” e descreva o que acontece.

A CADA UNIDADE ADICIONADA AO COEFICIENTE b, O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARITMA TRANSLADA EM MESMA INTENSIDADE NO SENTIDO OPOSTO, EM RELAÇÃO AO EIXO x

Figura 64: Comentário da Equipe 1 referente à questão 1

A Equipe 3 equivocou-se em sua análise ao afirmar que qualquer alteração que se faça no parâmetro “b”, o gráfico parte da origem. Contrariando e exemplificando tal afirmação, tomemos a função $y = \ln(x + 2)$. Agora, esboçaremos a função $y = \ln(x + 3)$. Observaremos uma translação horizontal para esquerda em relação à função $y = \ln(x + 2)$ e não da origem. Esse tipo de análise necessita de um referencial que no caso do exemplo acima, foi à função $y = \ln(x + 2)$. Segue abaixo a Figura 65 referente ao relato equivocado da Equipe 3.

1) Plote a função $y = \ln(x + b)$. Varie o coeficiente “b” e descreva o que acontece.

Translada horizontalmente, quando o valor de "b" é positivo ele translada da origem para esquerda negativamente e quando adotamos valores negativos para "b" ele translada da origem para direita positivamente, ou seja, a translação se comporta de maneira oposta ao valor de "b".

Figura 65: Comentário da Equipe 3 referente à questão 1

A Equipe 6, como podemos observar na Figura 66, não conseguiu identificar o movimento de translação ocorrido no gráfico e sim, uma variação na angulação do gráfico em relação ao eixo x que não existe.

1) Plote a função $y = \ln(x + b)$. Varie o coeficiente “b” e descreva o que acontece.

Quando variamos o coeficiente b tanto para direita ou para esquerda notamos que muda a angulação do gráfico.

Figura 66: Comentário da Equipe 6 referente à questão 1

Observamos que os alunos possuem uma grande dificuldade em descrever, por escrito, suas observações. Muitas das vezes, fica nítida a compreensão do analisado, mas se "esbarram" nas dificuldades inerentes a escrita, que a nosso ver, transcende o âmbito do saber matemático.

O objetivo da questão 2 era que as equipes observassem que o coeficiente "a" é responsável pela mudança da inclinação do gráfico da função $y = a\ln(x+b)$. Isso acontece pelo fato da coordenada da abscissa ser multiplicada pelo coeficiente "a" e o valor da ordenada do ponto se manter constante. Esperávamos também que as equipes mencionassem a simetria em relação ao eixo x ao variarmos o coeficiente "a" entre valores positivos e negativos. A Tabela 55 nos mostra o resultado da questão.

Tabela 55: Resultado da questão 2 da atividade no laboratório de informática sobre funções logarítmicas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	04	36,4%
Parcialmente correto	03	27,2%
Errado	04	36,4%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 2:

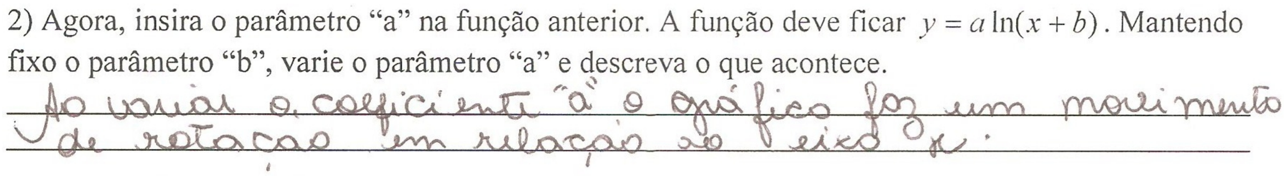
Além de relatar corretamente o que ocorre no gráfico da função, a Equipe 1 ainda fez menção à raiz da função ressaltando que ela não muda ao variarmos o coeficiente "a", como nos mostra a Figura 67.

2) Agora, insira o parâmetro "a" na função anterior. A função deve ficar $y = a\ln(x+b)$. Mantendo fixo o parâmetro "b", varie o parâmetro "a" e descreva o que acontece.

AO ATRIBUIRMOS VALORES POSITIVOS AO COEFICIENTE ANGULAR DA FUNÇÃO, OCORRE UMA DILATAFAÇÃO DO GRÁFICO COM Y TENDENDO A $-\infty$ SEM QUE SUA RAIZ SE ALTERE EM RELAÇÃO À FUNÇÃO GENÉRICA Y=LN X.

Figura 67: Comentário da Equipe 1 referente à questão 2

As Equipes 2, 3, 8, 9 e 11 afirmaram, equivocadamente, que a variação do coeficiente "a" resulta no movimento rígido, rotação. A resposta foi considerada incorreta. Segue como exemplo, o depoimento da Equipe 11 (Figura 68).



2) Agora, insira o parâmetro “a” na função anterior. A função deve ficar $y = a\ln(x+b)$. Mantendo fixo o parâmetro “b”, varie o parâmetro “a” e descreva o que acontece.

Ao variar o coeficiente "a" o gráfico faz um movimento de rotação em relação ao eixo x.

Figura 68: Comentário da Equipe 11 referente à questão 2

O resultado ficou abaixo do esperado. Todos os alunos conseguiram observar uma mudança na inclinação do gráfico em relação ao eixo x, porém, 5 equipes afirmaram que o movimento que acontece no gráfico se tratava de rotação, sendo que na verdade, o que acontece é uma “contração” ou uma “dilatação” de acordo como se variava o parâmetro “a”. Rotação é um movimento rígido, isto é, o gráfico da função não sofre nenhuma deformação.

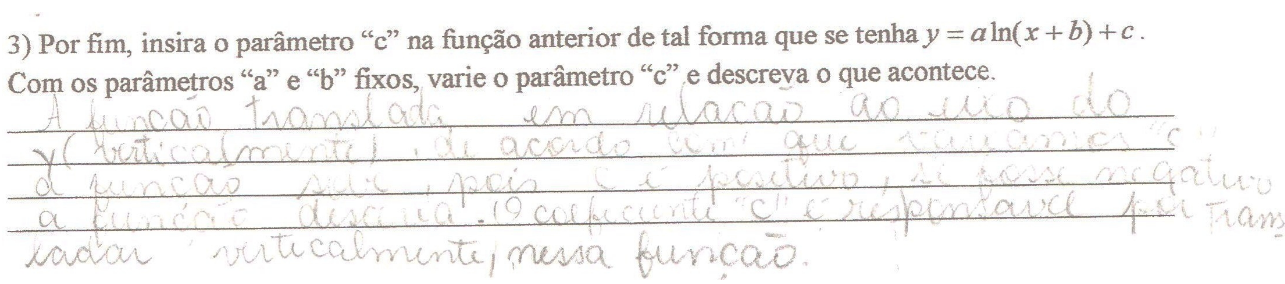
Além das observações supracitadas pelas equipes, algumas outras características inerentes ao gráfico também foram observados pelos mesmos, como: a raiz da função e a simetria em relação ao eixo x ao variar o parâmetro “a”.

Com a questão 3, esperávamos que as equipes conseguissem visualizar o movimento rígido de translação vertical que ocorre ao variarmos o parâmetro “c” da função $y = a\ln(x+b)+c$, mantendo-se fixos os outros parâmetros. O resultado é apresentado na Tabela 56.

Tabela 56: Resultado da questão 3 da atividade no laboratório de informática sobre funções logarítmicas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	10	90,9%
Parcialmente correto	00	0%
Errado	01	9,1%
Branco	00	0%

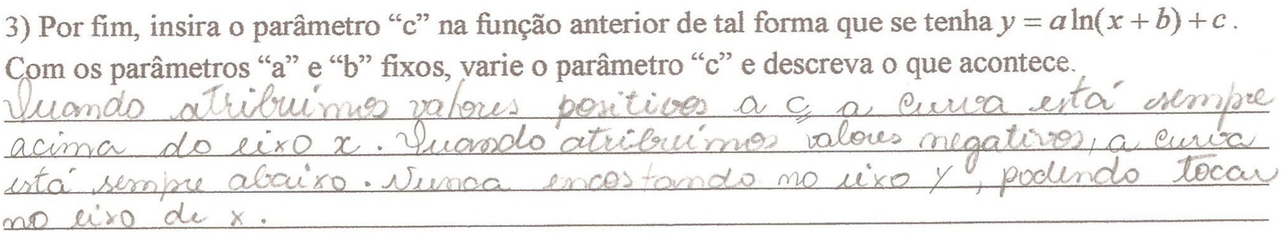
Abaixo segue as Figura 69 e Figura 70 como exemplos de comentário corretos e equivocados, respectivamente, realizados pelas Equipes 9 e 7:



3) Por fim, insira o parâmetro “c” na função anterior de tal forma que se tenha $y = a\ln(x+b)+c$.
Com os parâmetros “a” e “b” fixos, varie o parâmetro “c” e descreva o que acontece.

A função translada em relação ao eixo do y (verticalmente), de acordo com que variamos "c" a função sobe, pois c é positivo, se fosse negativo a função desceria. O coeficiente "c" é responsável por transladar verticalmente, nessa função.

Figura 69: Comentário da Equipe 9 referente à questão 3



3) Por fim, insira o parâmetro "c" na função anterior de tal forma que se tenha $y = a\ln(x+b)+c$.
Com os parâmetros "a" e "b" fixos, varie o parâmetro "c" e descreva o que acontece.
Quando atribuímos valores positivos a c a curva está sempre acima do eixo x. Quando atribuímos valores negativos, a curva está sempre abaixo. Nunca encostando no eixo y, podendo tocar no eixo de x.

Figura 70: Comentário da Equipe 7 referente à questão 3

Podemos observar que os alunos, de uma maneira geral, não apresentam grandes dificuldades quanto à compreensão da variante "c" nas funções. A partir daqui, acreditamos que os alunos já são capazes de concluir que ao se acrescentar valores (positivos ou negativos) ao coeficiente "c", o resultado gráfico obtido se dará pela translação vertical do gráfico.

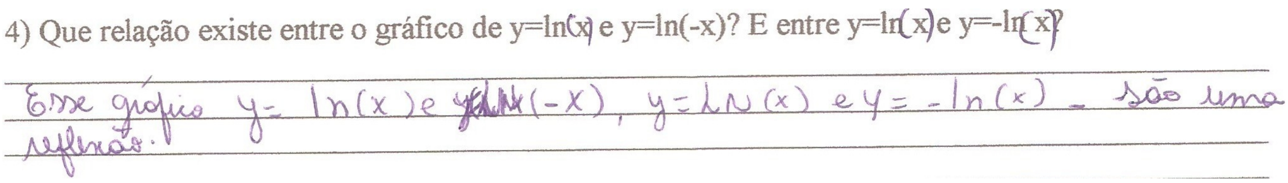
As transformações geométricas em gráficos de funções foram exaustivamente discutidas nas aulas. O movimento de simetria (reflexão) foi uma das mais destacadas e exemplificadas ao longo do projeto. Portanto, aguardávamos um resultado bem positivo na análise da questão 4. Esperávamos também que as equipes observassem as simetrias existentes entre os pares de funções ($y = \ln(x)$ e $y = \ln(-x)$) e ($y = \ln(x)$ e $y = -\ln(x)$), além de explicitarem os eixos de simetrias entre ambos os pares de funções. A Tabela 57 nos mostra o resultado dessa questão.

Tabela 57: Resultado da questão 4 da atividade no laboratório de informática sobre funções logarítmicas

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	07	63,6%
Parcialmente correto	04	36,4%
Errado	00	0%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 4:

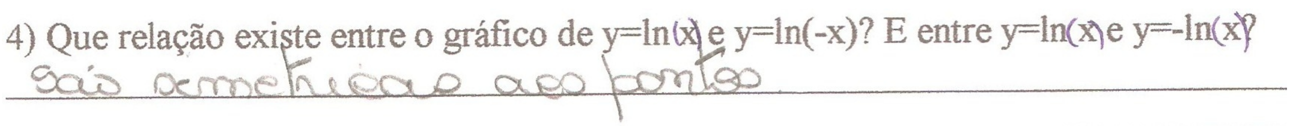
Os comentários das Equipes 5 e 10 foram considerados como "Parcialmente correta" por estarem desprovidos de detalhes, como mostram as Figura 71 e Figura 72.



4) Que relação existe entre o gráfico de y=ln(x) e y=ln(-x)? E entre y=ln(x) e y=-ln(x)?

Esse gráfico y= ln(x) e y=ln(-x), y=ln(x) e y= -ln(x) são uma reflexão.

Figura 71: Comentário da Equipe 5 referente à questão 4



4) Que relação existe entre o gráfico de y=ln(x) e y=ln(-x)? E entre y=ln(x) e y=-ln(x)?

São semetricas ao pontos

Figura 72: Comentário da Equipe 10 referente à questão 4

A Equipe 9 falou sobre a simetria existente entre os pares de funções, mas não mencionou seus respectivos eixos de simetria. Apenas 2 equipes mencionaram os pontos de interseção do gráfico com os eixos ortogonais e 2 equipes disseram que os gráfico em análise não tocam no eixo y.

Esperávamos com a questão 5, que as equipes analisassem as funções $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$, e identificassem as relações entre ambas como domínio e imagem, a relação dos gráficos com os eixos ortogonais, a curvatura de ambas, crescimento, decrescimento e o eixo de simetria entre as funções. Segue a Tabela 58 contendo os pontos notáveis identificados pelos alunos na resolução da questão. Vale ressaltar que as equipes destacaram vários desses pontos notáveis em suas considerações.

Tabela 58: Pontos notáveis identificados pelos alunos na questão 5

Pontos Notáveis Identificados	Alunos	Porcentagem
Domínio e imagem	04	63,6%
Relação do gráfico com o eixo x	05	36,4%
Relação do gráfico com o eixo y	06	0%
Monotonicidade da função	04	0%
Eixo de simetria	08	0%
Curvatura dos gráficos	02	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 5:

A Equipe 5 demonstrou não saber o conceito de domínio e imagem. Confundiram ambos com os pontos de interseção do gráfico com os eixos ortogonais, como podemos verificar na Figura 73 relativa ao comentário da equipe.

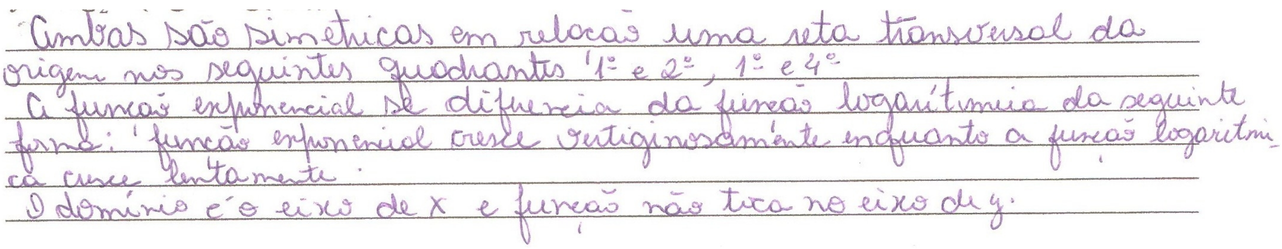

Ambas são simetricas em relacaõ uma reta transversal da origem nos seguintes quadrantes 1º e 2º, 1º e 4º
A funcaõ exponencial se diferencia da funcaõ logarítmica da seguinte forma: função exponencial cresce vertiginosamente enquanto a funcaõ logaritmica cresce lentamente.
O domínio é o eixo de x e funcaõ não toca no eixo de y.

Figura 73: Comentário da Equipe 5 referente à questão 5

Já a Equipe 6 não especificou nenhuma função mas realizou uma comparação, de forma generalizada, entre as funções logarítmicas e exponenciais. Afirmou, equivocadamente, que a função logarítmica nunca toca o eixo y. Vale ressaltar que este fato depende da função em questão. A fim de ilustração, analisaremos as famílias da função $y = a\ln(x) + c$. Note que de fato para qualquer valor atribuído aos parâmetros "a" e "c" (exceto $a = 0$) o gráfico não interceptará o eixo y. Contudo, se tomarmos a função $y = a\ln(x+) + c$, com $b > 0$, o gráfico intercepta o eixo y.

Relataram também que a função logarítmica cresce de uma forma bem lenta ao contrário da função exponencial onde o crescimento é vertiginoso, além de identificar o eixo de simetria entre as funções comparadas.

4.8. RESULTADO E ANÁLISE DO TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS OCORRIDAS NO GRÁFICO DA FUNÇÃO RAIZ QUADRADA $y = a\sqrt{x+b} + c$ COM O AUXÍLIO DO *WINPLOT*

Este teste de verificação (APÊNDICE N) foi realizada com 25 alunos, distribuídos em 11 equipes, como mostra o Quadro 3 abaixo:

EQUIPES	**EQUIPE 1 – ESM04 e ESM19**
	EQUIPE 2 – ESM01 e ESM14
	EQUIPE 3 – ESM02 e ESM27
	EQUIPE 4 – ESM09, ESM17 e ESM29
	EQUIPE 5 – ESM08 e ESM10
	EQUIPE 6 – ESM20 e ESM28
	EQUIPE 7 – ESM18 e ESM24
	EQUIPE 8 – ESM12 e ESM23
	EQUIPE 9 – ESM11 e ESM22
	EQUIPE 10 – ESM03, ESM07 e ESM16
	EQUIPE 11 – ESM05, ESM15 e ESM21

Quadro 3: Distribuição dos alunos em equipes de 2 ou 3 alunos

O objetivo dessa atividade era a de propiciar aos alunos a possibilidade de investigar e visualizar os movimentos ocorridos na função raiz quadrada $y = a\sqrt{x+b} + c$, onde os parâmetros “a”, “b” e “c” variam. A partir das aulas presenciais ministradas sobre o assunto em questão, os alunos tiveram como ferramenta de auxílio um objeto de aprendizagem, um *applet* da função em questão (Figura 74), criado pelo *software Geogebra* contido no KVA.

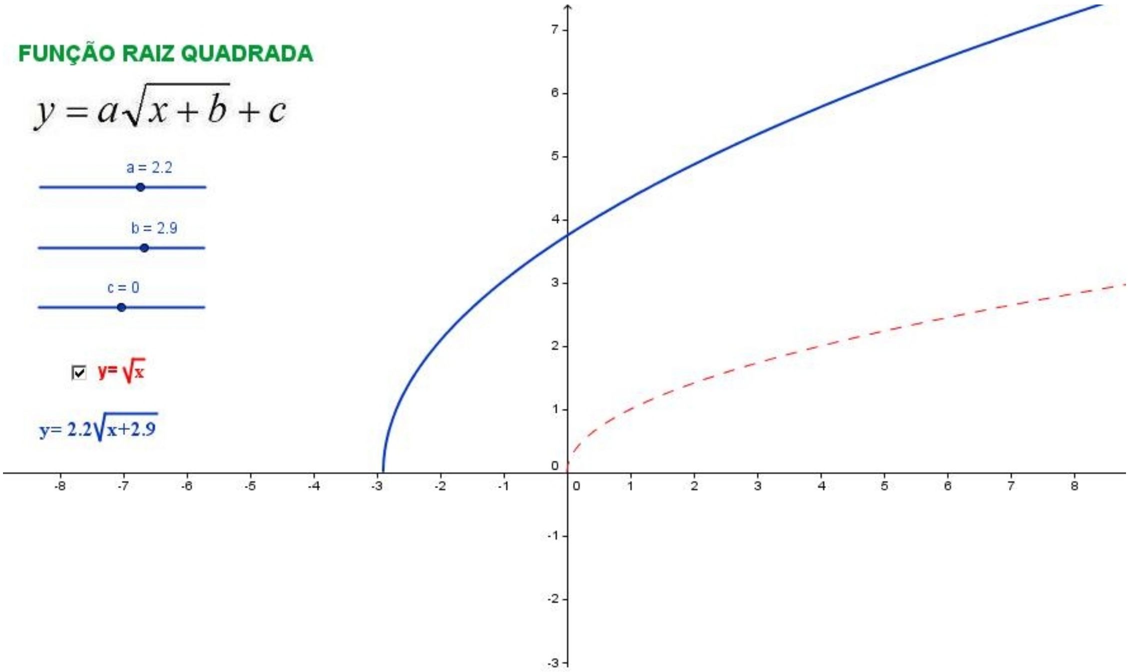


Figura 74: *Applet* sobre função raiz quadrada construído no *software Geogebra*

Propomos as equipes, uma atividade investigativa onde os mesmos deveriam analisar e relatar, por escrito, o comportamento dessa função logarítmica ao movimentarem um dos coeficientes, mantendo os outros dois constantes.

Com os alunos já dispostos em equipes, foi distribuída uma folha de atividades contendo a definição de função raiz quadrada e quatro questões referentes às transformações ocorridas na função $y = a\sqrt{x+b} + c$. Os alunos apenas poderiam se comunicar entre os integrantes da própria equipe. Com o *software Winplot* aberto, foi solicitado para que cada equipe plotasse a função $y = \sqrt{x}$, que os auxiliaram nas respostas referentes às três primeiras perguntas da atividade. Essa função também serviu como um norte para a análise das transformações ocorridas no plano.

Esperávamos, com a questão 1, que os alunos identificassem o movimento rígido de translação horizontal que ocorrem na função $y = \sqrt{x+b}$ ao se variar o parâmetro “b”, sempre relacionando com a função $y = \sqrt{x}$. O resultado da questão 1 pode ser observado com mais detalhe na Tabela 59.

Tabela 59: Resultado da questão 1 da atividade no laboratório de informática sobre função raiz quadrada

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	07	63,6%
Parcialmente correto	04	36,4%
Errado	00	0%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 1:

A Equipe 1 não mencionou o movimento de transformação que ocorre ao variarmos o coeficiente "b". Ficou clara a percepção da equipe quanto a não mudança da inclinação da angulação. A resposta foi considerada "Parcialmente Correta". Segue a Figura 75 referente ao depoimento da Equipe 7.

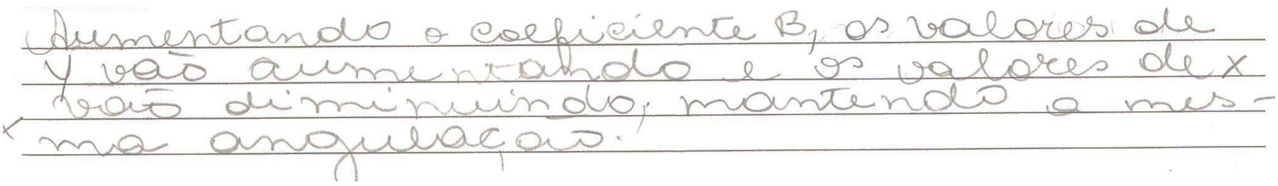

Aumentando o coeficiente B, os valores de y vão aumentando e os valores de x vão diminuindo, mantendo a mes-ma angulação.

Figura 75: Comentário da Equipe 7 referente à questão 1

Já o depoimento da Equipe 8 (Figura 76) foi considerado incompleto, pois mesmo descrevendo o movimento de translação que ocorre, não especificaram a direção nem tão pouco o sentido.


Ao variar o coeficiente "b" o gráfico translada pelo eixo x.

Figura 76: Comentário da Equipe 8 referente à questão 1

Das 11 equipes, apenas uma menciona a monotonicidade da função.

Esperávamos, com esta questão 2, que os alunos percebessem a mudança ocorrida na inclinação do gráfico da função $y = a\sqrt{x+b}$ ao variarmos o parâmetro "a", mantendo-se fixo o parâmetro "b" e que constatassem que o movimento em questão, devido à distorção do gráfico, não se caracterizaria um movimento rígido. Na Tabela 60 é possível visualizarmos os resultados relativos à questão 2.

Tabela 60: Resultado da questão 2 da atividade no laboratório de informática sobre função raiz quadrada

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	06	54,5%
Parcialmente correto	01	9,1%
Errado	04	36,4%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 2:

A Equipe 2 cometeu uma série de equívocos em sua análise: o gráfico na verdade não rotaciona; dependendo do valor do coeficiente “b”, o gráfico pode interceptar o eixo y. A análise foi computada como errada, como podemos atestar na Figura 77.

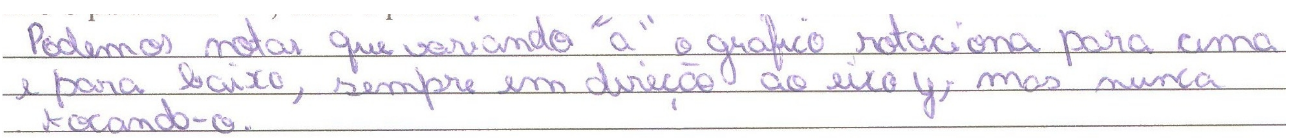

Podemos notar que variando “a” o gráfico rotaciona para cima e para baixo, sempre em direção ao eixo y, mas nunca tocando-o.

Figura 77: Comentário da Equipe 2 referente à questão 2

A resposta da Equipe 3 foi considerada “Parcialmente Correta”. A equipe descreveu equivocadamente um movimento de rotação do gráfico, mas mencionou a simetria em relação ao eixo x. Já a Equipe 6 referiu-se ao gráfico em questão como sendo uma reta. Afirmou que o gráfico “se fixa no eixo x positivo” (o gráfico apenas toca no eixo x quando temos $c \leq 0$ e o valor do x será sempre positivo se tivermos $b > 0$. A equipe ainda afirmou em se tratar de um movimento de rotação.

A Equipe 10 provavelmente não conseguiu variar o coeficiente “a” e demonstraram desconhecer o significado de paralelismo, conforme podemos verificar em seu depoimento na Figura 78.

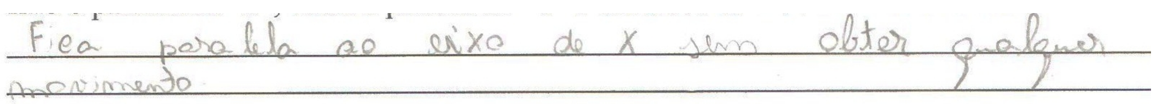

Fica paralela ao eixo de x sem obter qualquer movimento

Figura 78: Comentário da Equipe 8 referente à questão 1

Todos os alunos que erraram a questão 2 entenderam se tratar de um movimento de rotação sendo que na verdade o que acontece é uma variação da inclinação do gráfico quando variamos o coeficiente “a”.

No que diz respeito a questão 3, onde as equipes deveriam variar o coeficiente “c” da função $y = a\sqrt{x+b} + c$ mantendo-se “a” e “b” fixos, esperávamos que notassem o movimento rígido de translação vertical que ocorre no plano. A Tabela 61 nos mostra o resultado da questão 3.

Tabela 61: Resultado da questão 3 da atividade no laboratório de informática sobre função raiz quadrada

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	07	63,6%
Parcialmente correto	03	27,3%
Errado	01	9,1%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 3:

As Equipes 2, 7 e 8 descreveram corretamente a transformação ocorrida no plano ao se variar o parâmetro “c”. Contudo, não especificaram quando acontece a translação vertical para cima e para baixo.

Segue a Figura 79 referente ao depoimento da Equipe 2.

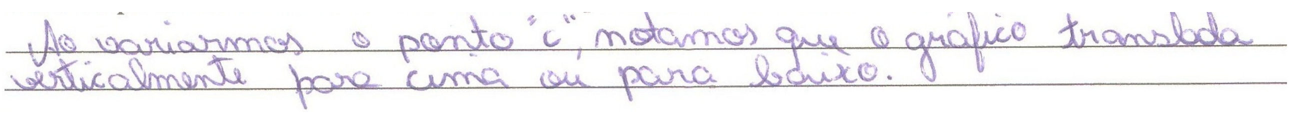

Ao variarmos o ponto "c", notamos que o gráfico translada verticalmente para cima ou para baixo.

Figura 79: Comentário da Equipe 2 referente à questão 3

Por fim, já com a questão 4, esperávamos que as equipes determinassem o domínio e a imagem da função $y = 5\sqrt{x-4}$ através da visualização de seu gráfico sem a utilização do método algébrico. O objetivo aqui seria mostrar a quantidade de informações que um gráfico pode nos oferecer e a rapidez e simplicidade com a qual podemos obtê-las. A Tabela 62 nos mostra os resultados da questão 4.

Tabela 62: Resultado da questão 4 da atividade no laboratório de informática sobre função raiz quadrada

Resultado	Alunos	Porcentagem
Correto	06	54,5%
Parcialmente correto	03	27,3%
Errado	02	18,2%
Branco	00	0%

Segue algumas observações referentes à análise dos dados da questão 4:

A análise da Equipe 3 (Figura 80) foi considerada “Parcialmente Correta”, pois não especificou os intervalos do domínio e a imagem. Vale ressaltar também que a imagem desta função não possui penas valores positivos. O zero também pertence ao conjunto e ele não é nem positivo e nem negativo.

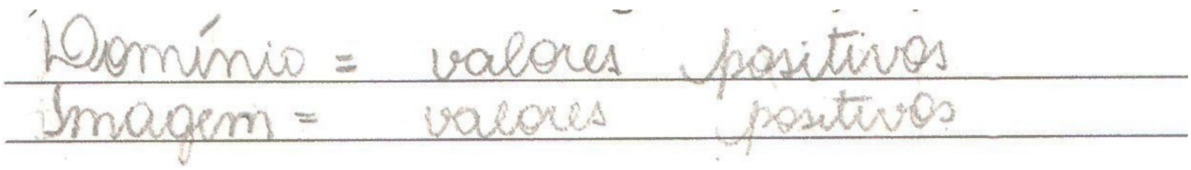


Figura 80: Comentário da Equipe 3 referente à questão 4

Já as Equipes 3 e 9 afirmaram, equivocadamente, não existir domínio nem imagem na função. Seguem as Figura 81 e Figura 82 referentes aos depoimentos das Equipes 2 e 9 respectivamente.

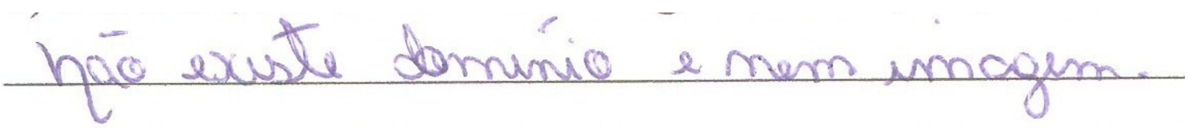


Figura 81: Comentário da Equipe 2 referente à questão 4

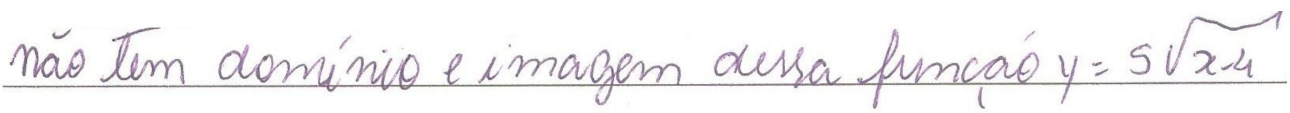


Figura 82: Comentário da Equipe 9 referente à questão 4

4.9. RELATÓRIO E ANÁLISE DO TESTE FINAL

O teste final (APÊNDICE O) foi composto por 6 questões em sua totalidade extraídas do próprio teste diagnóstico (APÊNDICE B) e realizada pelos 27 alunos da turma. O objetivo foi averiguar o nível de aprendizagem dos participantes no que tange as funções mais especificamente transformações geométricas e suas aplicações pós intervenção.

No teste final, excluímos as questões 2, 3 e as letras “d” e “e” da questão 5 que compunha o teste diagnóstico. O fato dos alunos não terem tido acesso às questões (nem as suas resoluções) contidas no teste diagnóstico juntamente ao longo período de tempo que se deu da aplicação do teste diagnóstico para o teste final, decidimos por reaplicar as mesmas questões contidas no teste diagnóstico com a esperança de obtermos um resultado mais fidedigno a nossa intervenção.

Em posse dos resultados e análises do teste final, procuramos confrontar os resultados obtidos em ambos os testes (teste diagnóstico e teste final) a fim de que pudéssemos avaliar o grau de evolução determinado pela nossa intervenção junto aos alunos participantes.

Todas as questões do teste final assim como no teste diagnóstico foram analisadas de forma quantitativa e qualitativa, sempre as correlacionando com os resultados e análises do teste diagnóstico. Optamos em explicitar esses resultados em forma de gráficos comparativos. Utilizamos as abreviações TD e TF para representar, respectivamente, teste diagnóstico e teste final nos gráficos comparativos adiante. No teste diagnóstico, 29 alunos participaram e no teste final, devido à desistência de dois alunos no curso, computamos a participação de 27 alunos.

Na questão 1 do teste final (APÊNDICE O), os alunos novamente foram questionados sobre suas concepções acerca do conceito de funções. Buscamos, através da repetição do questionamento, averiguar o que mudou em termos de aquisição relativo ao conceito de função por parte do aluno. Esperávamos tão somente que estes estabelecessem conexões entre o conhecimento escolar e seu contexto social mediados pela nossa sequência didática percorrido desde o teste diagnóstico (APÊNDICE B) até o teste final.

Ao confrontarmos os resultados obtidos nos dois testes, pudemos observar que mesmo mantendo-se o número de aluno que não responderam, caiu para zero o número de aluno que afirmam não saber definir o conceito de função. Damos destaque ao aumento de alunos que associaram o conceito de função a uma dependência, como podemos observar no Gráfico 1.

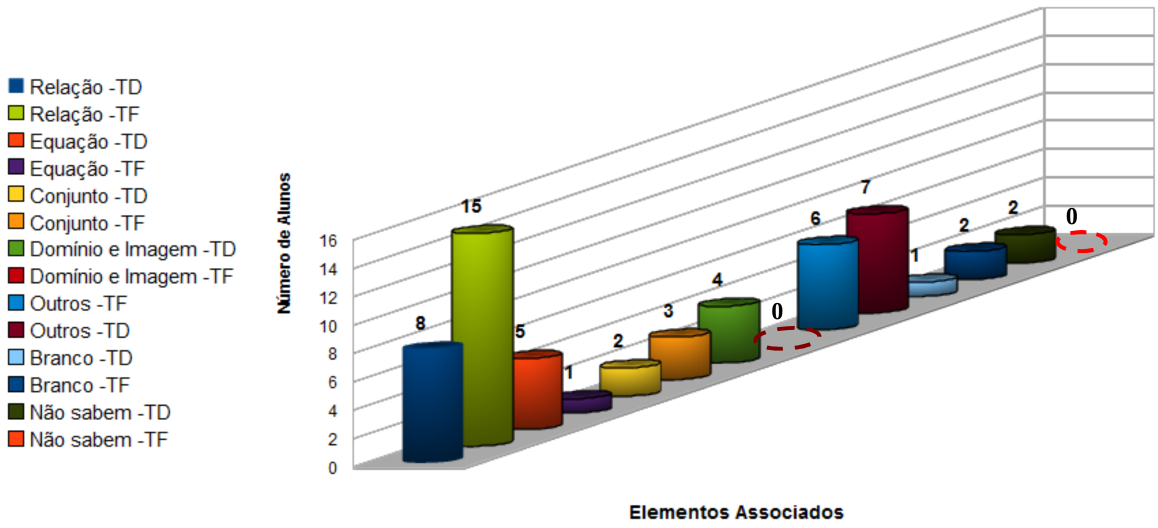


Gráfico 1: Gráfico comparativo referente ao conceito de funções no TD e TF

Concluímos que, mediante as nossas sequências didáticas impregnadas de muitos exercícios contextualizados e atividades investigativas com o uso do *software* Matemático e o KVA, que o conceito da definição de uma função por parte da maioria dos estudantes investigados está relacionado à dependência entre duas grandezas.

Nossa preocupação aqui não foi a de avaliar a formalização do conceito por parte do aluno, mas sim observar a conexão que este estabelece entre o conceito matemático e conceito já pré-existente, pois segundo Baraldi (1999, p.38), só acontece aprendizagem significativa quando o indivíduo conecta as novas ideias com as suas já existentes.

A questão 2 do teste final (APÊNDICE O) se tratava de uma situação-problema onde o aluno deveria aplicar o conceito de função afim. As letras “a” e “b” da questão buscavam medir o nível de evolução do aluno quanto à manipulação algébrica onde o aluno deveria realizar substituições para se determinar os valores das variáveis x e y. Já na letra “c” o aluno deveria conhecer conceitos relativos ao domínio e imagem de uma função e representá-la graficamente.

Com os resultados analisados e comparados pudemos perceber um aumento considerável no número de alunos que acertaram todas as letras da questão 2 do teste final. 48% do total de alunos que fizeram o teste final acertaram todas as letras da questão 2 enquanto que no teste diagnóstico (APÊNDICE B), apenas 24%, desses mesmos alunos, acertaram o exercício por completo.

Quanto aos alunos que erraram todas as questões, também registramos um avanço: 5 alunos erraram todas as questões no teste diagnóstico enquanto que no teste final todos os alunos que realizaram o teste acertaram, ao menos, uma das letras da questão 2.

No que se refere a letra “c” da questão 2, onde objetivávamos averiguar o nível de compreensão dos alunos quanto ao conceito de domínio e imagem, houve um aumento satisfatório no número acertos. No teste diagnóstico identificamos que apenas 24% dos alunos conseguiram acertar todas as questões enquanto que no teste final, o mesmo exercício foi concluído com êxito por 63% dos alunos participantes.

O resultado mais detalhado pode ser observado no Gráfico 2.

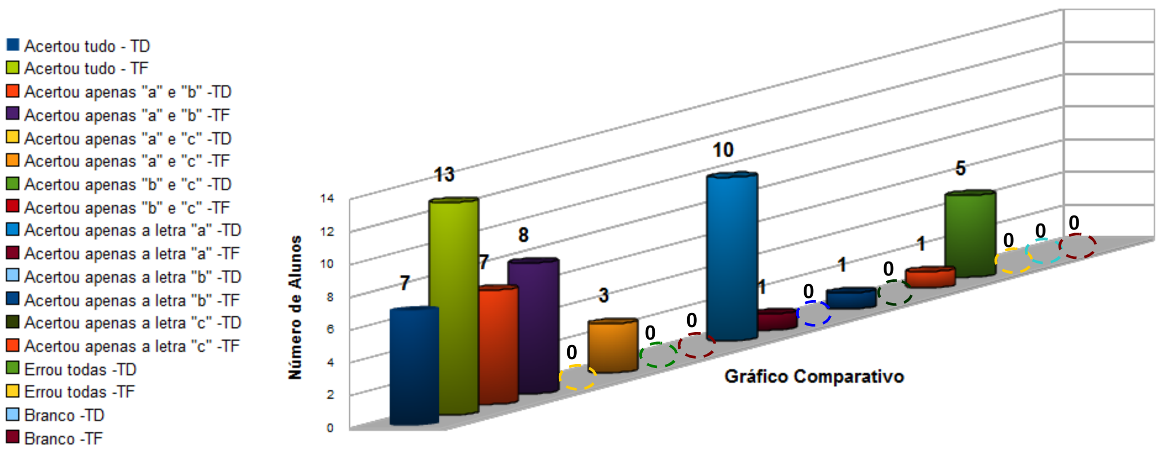


Gráfico 2: Gráfico comparativo dos resultados da questão 4 do TD e da questão 2 do TF

Na situação-problema referente à questão 3, buscamos averiguar o quanto os alunos evoluíram no que tange a capacidade de aplicação do conceito de função quadrática mais especificamente a determinação de máximos e mínimos, após as sequências didáticas concluídas.

Observamos, já com os resultados concluídos, que o número de alunos que acertaram todas as questões do teste final (APÊNDICE O) subiu para 77,8%. Uma evolução expressiva se compararmos com os 27,6% computados no teste diagnóstico (APÊNDICE B). Quanto aos alunos que erraram todas as questões, houve uma redução no que diz respeito ao percentual: 24% dos alunos erraram todas as questões no teste diagnóstico enquanto que no teste final, 18,5% não conseguiram acertar nenhuma das letras da questão 3. Obtivemos sucesso também no número de alunos que não fizeram a questão. No teste diagnóstico 41,4% dos alunos participantes não fizeram a questão. Já no teste final, todos os alunos fizeram a questão 3.

O resultado mais detalhado pode ser observado no Gráfico 3.

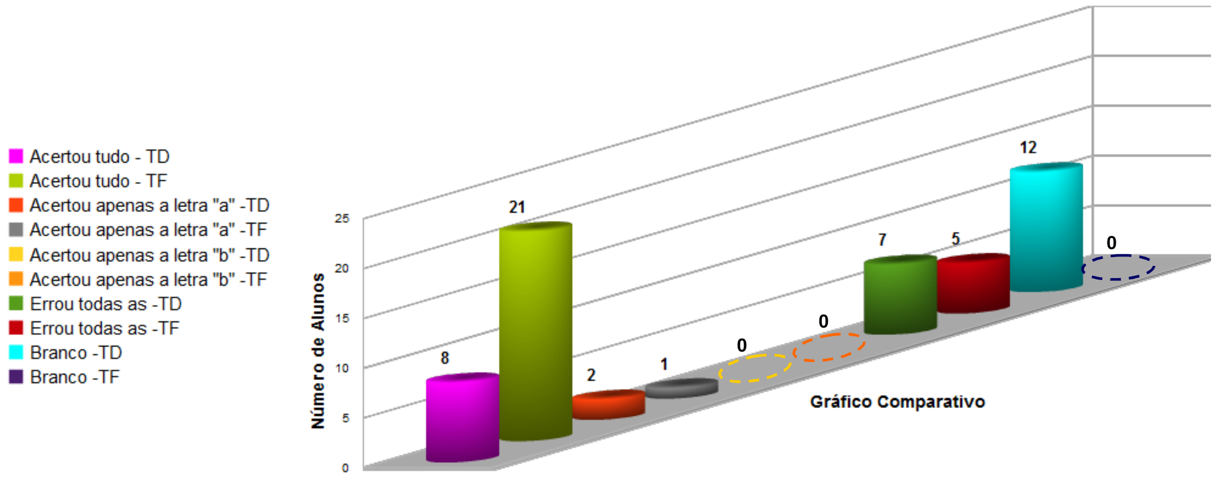


Gráfico 3: Gráfico comparativo dos resultados na questão quanto aplicado no TD e no TF

No que diz respeito à comparação entre as técnicas aplicadas na resolução da questão 3, nos testes diagnóstico (APÊNDICE B) e final (APÊNDICE O), destacamos o aumento percentual de alunos que optaram em resolver a situação-problema utilizando tão somente as fórmulas para a determinação do vértice da parábola. 20,7% dos alunos que fizeram a questão no teste diagnóstico optaram por utilizar apenas a fórmula como recurso para solucionar o problema contra 33,3% no teste final.

Outro aumento considerável foi em relação ao número de alunos que utilizaram os gráficos e fórmulas simultaneamente para a resolução do exercício nos dois testes: 20,1% no teste diagnóstico e 66,7% no teste final.

Vale ressaltar que o percentual aferido acima é em relação aos números de alunos que fizeram a questão e não ao total de alunos participantes que realizaram os testes.

O resultado mais detalhado pode ser observado no Gráfico 4.

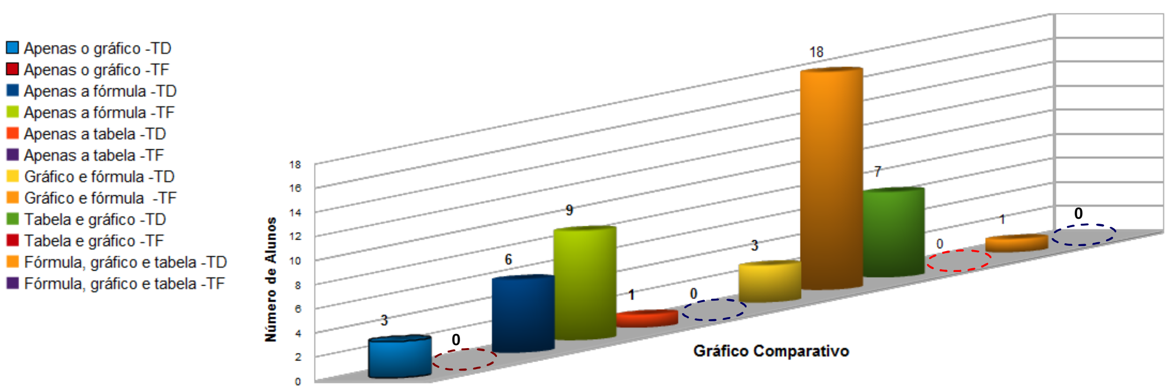


Gráfico 4: Gráfico comparativo das técnicas utilizadas na questão quanto aplicada no TD e no TF

A questão 4 que aplicamos no teste final (APÊNDICE O) é a mesma questão 6 do teste diagnóstico (APÊNDICE B) excetuando-se as funções referentes as letras “d” e “e” ambas as funções exponenciais. Optamos por excluí-las do teste final pelo fato de concordarmos que as atividades extra-classes ocorridas laboratório de informática propondo uma abordagem investigativa com o uso do *software Winplot* foram suficientes para a formação de nossa conclusão acerca do conteúdo funções exponenciais.

Portanto, esta questão foi composta por 3 funções (uma modular, uma afim e uma quadrática) onde os alunos deveriam esboçar seus gráficos. Ao reaplicarmos tal questão esperávamos, além de obter um número de acerto maior que o do teste diagnóstico, que os alunos aplicassem as técnicas de transformações geométricas nos esboços dos gráficos supracitados. No entanto, em nenhum momento determinamos que os aluno deveriam aplicar tal técnica deixando facultativo a eles o método de resolução e deixando claro que o objetivo dessa questão era a que eles realizassem a questão com êxito.

A letra “a” da questão 4 se tratava de uma função modular. O Gráfico 5 nos mostra os resultados obtidos no teste diagnóstico (APÊNDICE B) e no teste final (APÊNDICE O). É notório o grande avanço que obtivemos com as nossas sequências didáticas. O número de alunos que acertaram a letra “a” da questão 4 aumentou consideravelmente. Apenas 13,8% dos alunos que fizeram o teste diagnóstico acertaram o esboço da função enquanto que no teste final, 66,7% dos alunos obtiveram êxito.

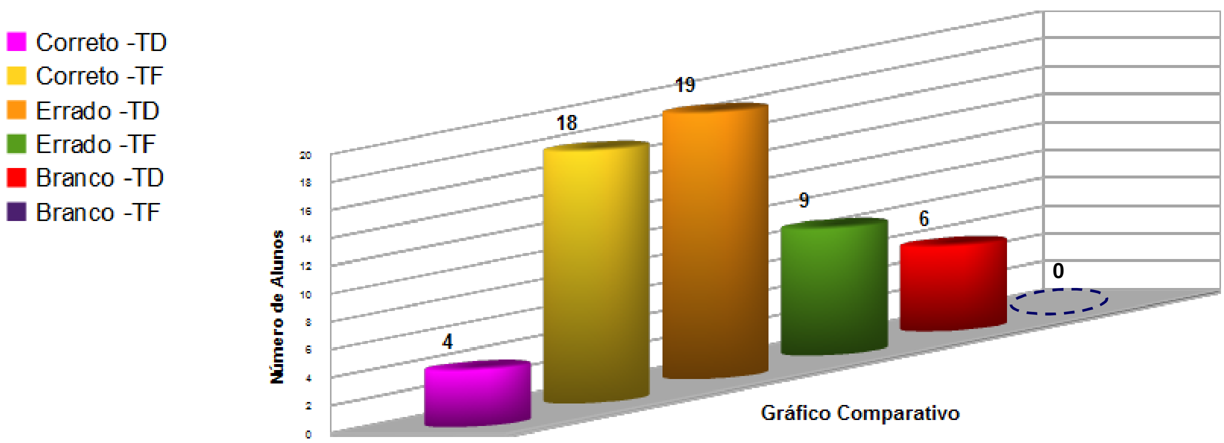


Gráfico 5: Gráfico comparativo dos resultados da questão quanto aplicada no TD e no TF

O número de alunos que deixaram a questão em branco também diminui de forma significativa. No teste diagnóstico, 20,7% do total dos alunos deixaram a letra “a” em branco e no teste final esse percentual caiu para 0% mostrando aqui que o aluno adquiriu mais segurança na resolução desse exercício. Leva-nos a crer que o resultado positivo se deu através de nossas intervenções.

No teste diagnóstico procuramos identificar e quantificar o número de alunos que utilizavam a técnica das transformações geométricas para determinar o gráfico da função modular. Neste teste inicial, contabilizamos que 87% dos alunos que realizaram a letra "a" desta questão utilizaram a tabela e encontrar os pares ordenados para então traçar o gráfico da função. Já no teste final, após nossa intervenção, computamos tão somente 7,4% dos alunos que utilizaram a tabela como um método para se determinar o gráfico.

Quanto à utilização dos conceitos de transformação geométrica, no teste diagnóstico apenas 13% dos alunos que fizeram a questão a aplicaram sendo que no teste final, o percentual de alunos que utilizaram as transformações geométricas aumentou para 92,6% (Gráfico 6). Convencemo-nos de que as sequências didáticas elaboradas e aplicadas por nós forneceram ao aluno condições para que esboçassem essas funções de uma forma rápida e mais fácil.

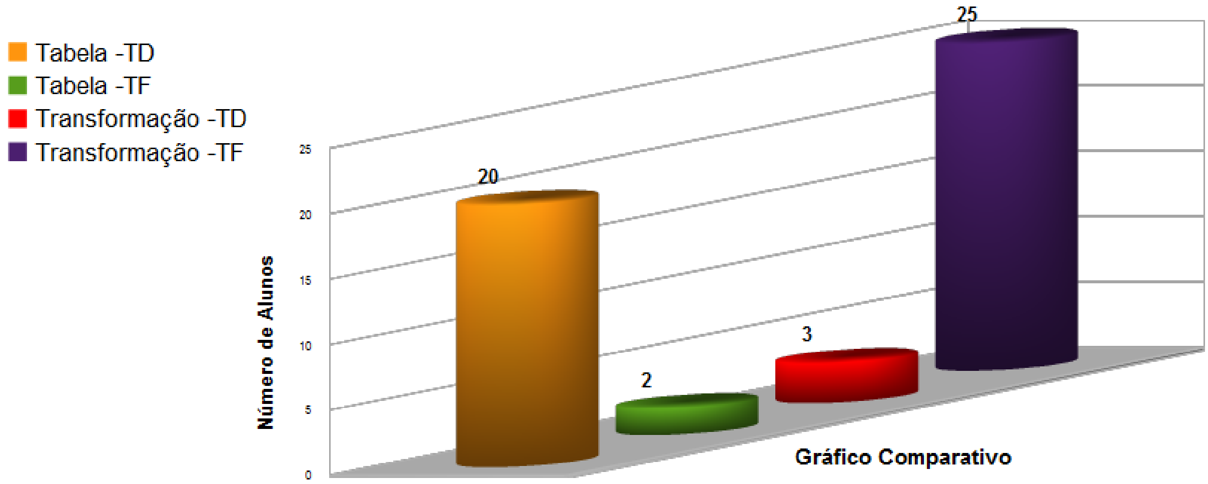


Gráfico 6: Gráfico comparativo das técnicas utilizadas na letra "a" da questão 4 quando aplicadas no TD e no TF

No que se refere ao resultado da letra "b" da questão 4 do teste final, o resultado foi abaixo do esperado. No teste diagnóstico, 58,6% dos alunos concluíram a questão com sucesso enquanto que no teste final, o número de acertos subiu tão somente para 63%. O número de alunos que erraram a questão também aumentou. No teste diagnóstico, 20,7% dos alunos que fizeram a questão erraram enquanto que no teste final o percentual de erros aumentou para 33,3%. Em contrapartida, o número de alunos que deixaram a questão em branco diminui consideravelmente mostrando com isso que as nossas intervenções deram mais segurança e embasamento para que pudessem realizar as atividades propostas.

Creditamos, no entanto, esse resultado insatisfatório, à dificuldade do aluno em compreender que o coeficiente angular da função $f(x)=\frac{x}{2}-2$ é $\frac{1}{2}$. Ficou nítida a grande dificuldade dos alunos em operar com números fracionários durante o desenvolvimento do projeto. Canova (2006), em sua dissertação, procurou identificar o entendimento que os professores dos 1º e 2º ciclos do ensino fundamental de uma escola pública de São Paulo, apresentavam em relação ao conceito de frações. Ele afirma que o baixo rendimento dos alunos sobre a esse conceito é uma realidade e pode ser constado nas avaliações oficiais como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Ele complementa afirmando que nos relatórios oficiais, onde se discute os resultados, há claras recomendações para que o conteúdo frações seja abordado nas escolas com mais vínculo a problemas do cotidiano.

O Gráfico 7 explicita as comparações entre os resultados obtidos no teste diagnóstico e no teste final.

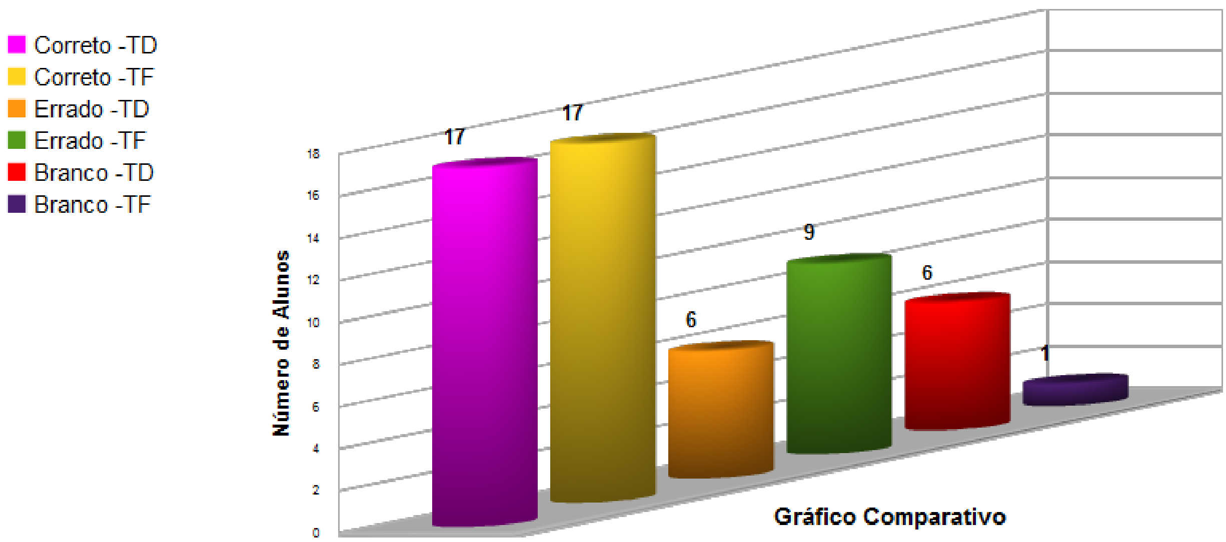


Gráfico 7: Gráfico comparativo dos resultados da letra “b” da questão 4quando aplicada no TD e no TF

No Gráfico 8 abaixo, podemos observar que, no que tange as técnicas utilizadas pelos alunos na resolução do exercício em questão no teste final (APÊNDICE O), ouve uma mudança considerável se comparado ao teste diagnóstico (APÊNDICE B). Enquanto que no teste inicial, 95,6% dos alunos que fizeram a questão utilizaram a tabela como o único meio para o traçado do gráfico da função afim, somente 3,8% a utilizaram no teste final. Em contrapartida, nenhum aluno esboçou a função afim através de transformações geométricas no teste diagnóstico. O desconhecimento dessa técnica ficou evidente em alguns depoimentos por escrito de alguns alunos registrado no teste diagnóstico. Já no teste final, 84,7% dos alunos, após nossas intervenções, utilizaram os conceitos de transformações geométricas.

Conforme elucida o Gráfico 8, alguns alunos procuraram esboçar seus gráficos através da determinação de dois pontos pertencentes à reta.

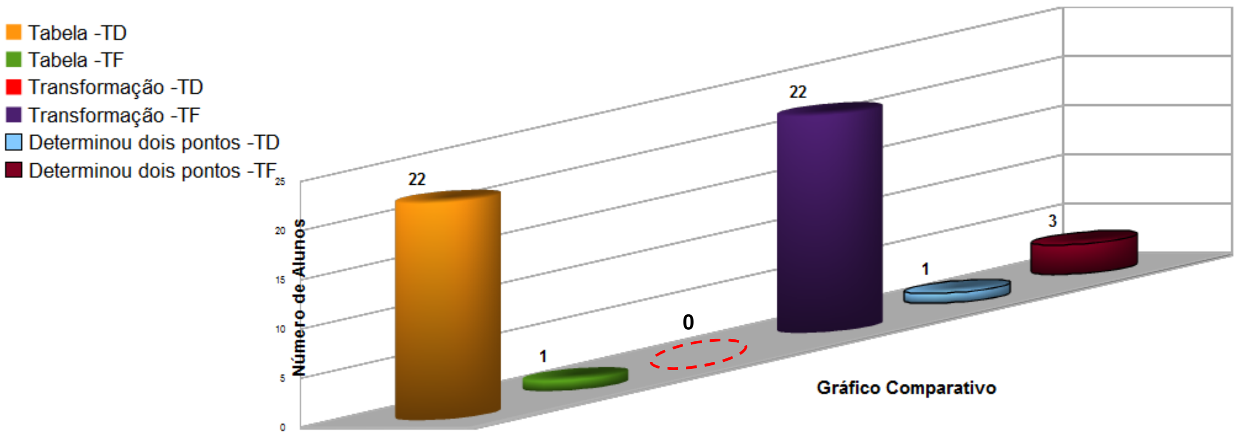


Gráfico 8: Gráfico comparativo das técnicas utilizadas na letra "b" da questão 4 quando aplicadas no TD e no TF

Na questão referente à letra "c" da questão 4 do teste final (APÊNDICE O), ficou evidenciado o quanto nossas intervenções colaboraram de forma contundente para uma maior compreensão do traçado do gráfico de funções quadráticas por parte dos alunos principalmente quando estes lançam mão das transformações geométricas no plano.

No teste diagnóstico (APÊNDICE B), ao avaliarmos os resultados obtidos nessa mesma questão, computamos tão somente 37,9% de acertos enquanto que no teste final, esse percentual subiu para 66,7%. O número de questões erradas diminuiu de 44,8% no teste diagnóstico para 33,3% no teste final conforme nos mostra o Gráfico 9.

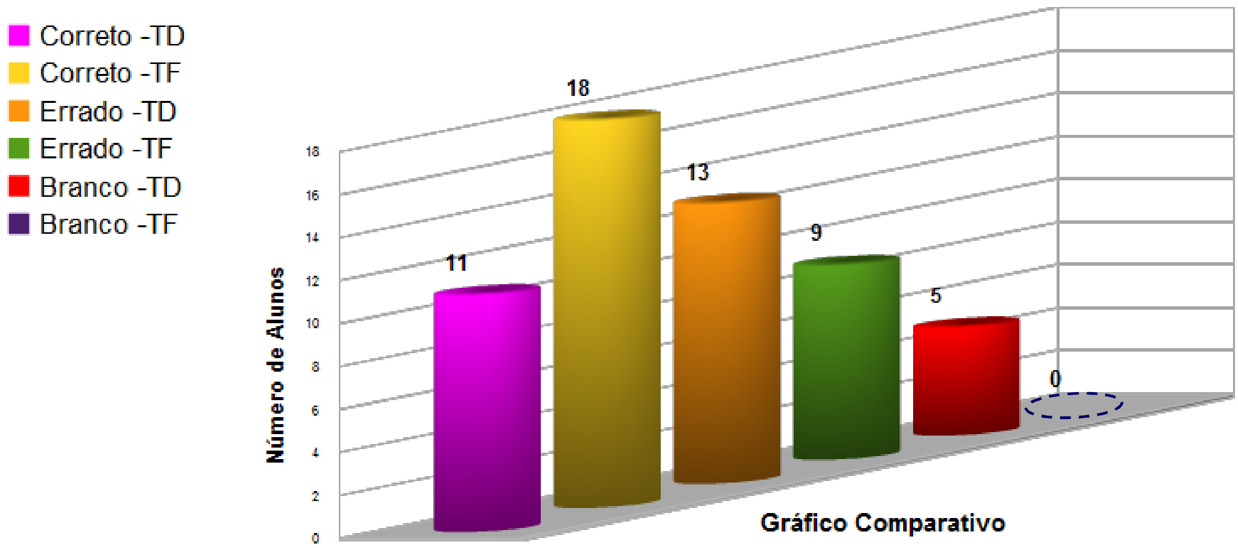


Gráfico 9: Gráfico comparativo dos resultados da letra "c" da questão 4 quando aplicada no TD e no TF

Observamos que os alunos adquiriram mais segurança na realização do exercício. Esse fato pode ser mais bem observado no levantamento feito por nós onde pudemos verificar que todos os alunos fizeram a questão no teste final, isto é, nenhum aluno participante deixou a questão em branco enquanto que no teste diagnóstico, 17,3% não o fizeram.

Além da análise quantitativa procuramos verificar as técnicas aplicadas pelos mesmos para o traçado do gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 4$ no teste diagnóstico e final. Conforme apresenta o Gráfico 10, conseguimos observar que os alunos aplicaram os conceitos de transformações geométricas no plano como uma forma prática e eficiente para o esboço da função quadrática.

Dos alunos que fizeram a questão no teste diagnóstico, 75% utilizaram a tabela para o esboço do gráfico da função. Já no teste final esse percentual diminui consideravelmente para 11,1%. Em relação à aplicação das transformações geométricas, ninguém havia feito a questão utilizando tal conceito no teste diagnóstico enquanto que no teste final esse percentual subiu para 85,2%.

A aplicação da fórmula de Bháskara tal como a determinação da fórmula do vértice foram os outros tipos de técnicas aplicadas pelos alunos durante esses testes. Os resultados podem ser observados no Gráfico 10.

Através da coleta e análise desses dados podemos afirmar que houve um avanço significante no que tange ao traçado de gráficos de funções quadráticas. Como podemos averiguar, os alunos se convenceram de que a aplicação do método de transformações geométricas para o esboço dessas funções, na maioria das vezes, é um meio mais rápido e eficiente de representar graficamente uma função. Nossas intervenções com o auxílio do KVA somado as nossas aulas expositivas e práticas, surtiram o efeito esperado por todos nós.

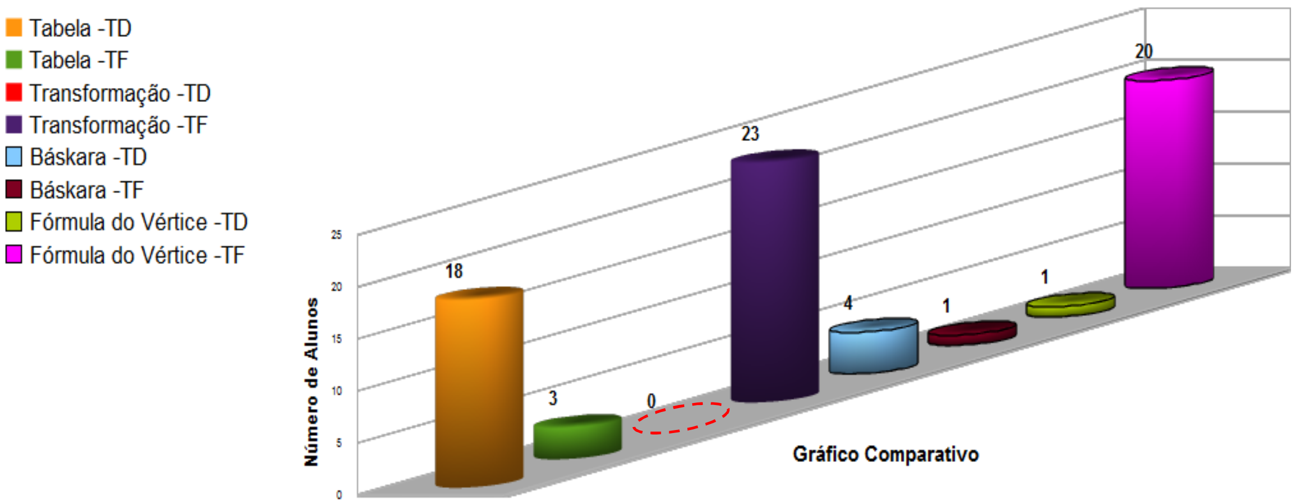


Gráfico 10: Gráfico comparativo das técnicas utilizadas na letra "c" da questão 4 quando aplicadas no TD e no TF

A questão 5 do teste final (APÊNDICE O) se refere a mesma questão 7 aplicada no teste diagnóstico (APÊNDICE B). Procuramos avaliar o nível de evolução dos alunos no que tange a aplicação do conceito de função exponencial em situações-problemas e sua capacidade em analisar, graficamente, o comportamento desse tipo de função.

Em nossas intervenções, realizamos diversos problemas onde a aplicação do conceito de funções exponenciais se fazia necessária. Os exercícios foram extraídos de diversos livros didáticos de matemática utilizados nas escolas da rede pública e privados.

Pudemos observar também que as nossas intervenções mediadas pelos recursos tecnológicos como o KVA e o *software Winplot* surtiram o resultado esperado. Isso fica bem evidenciado nos resultados dos testes diagnóstico e final onde após termos feito o levantamento quantitativo e qualitativo, explicitamos seu resultado através do Gráfico 11.

No teste diagnóstico, 31% dos alunos participantes acertaram todas as letras da questão enquanto que no teste final esse percentual subiu para 66,7%, o que consideramos ser um resultado positivo visto que no teste final ainda houve 2 alunos a menos. A quantidade de alunos que erraram toda a questão também diminuiu após nossa intervenção. 6,9% dos alunos que fizeram a questão no teste diagnóstico erraram essa questão por completo. Já no teste final, todos os alunos acertaram, ao menos, uma das letras da questão. Outro fator que nos motivou muito foi o percentual de alunos que não fizeram a questão. No teste diagnóstico, 44,4% do total de alunos participantes não fizeram a questão enquanto que no teste final nenhum aluno deixou a questão em branco.

O restante da análise referente a esta questão pode ser verificada no Gráfico 11.

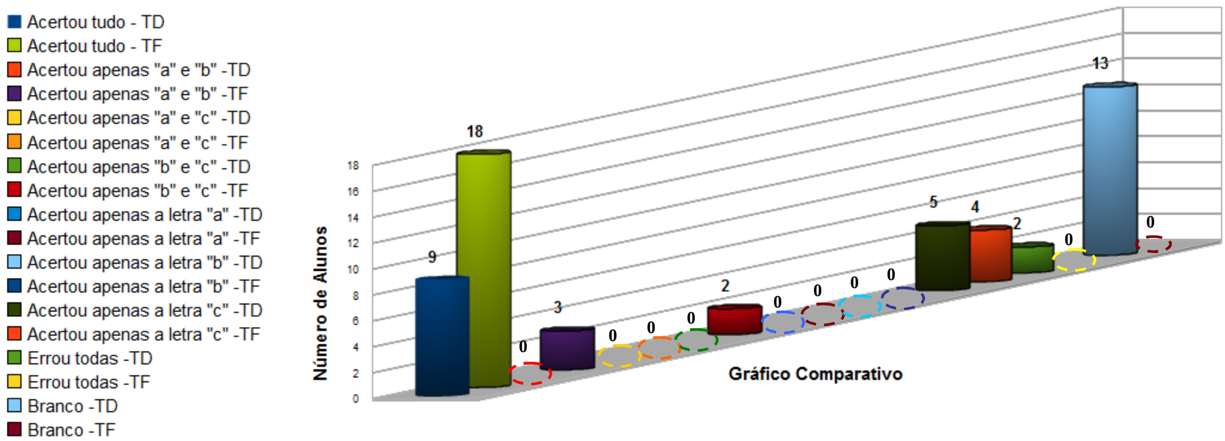


Gráfico 11: Gráfico comparativo dos resultados da questão 5 quando aplicada no TD e no TF

A última questão do teste final (APÊNDICE O) foi a questão 6 que se refere a mesma questão 8 aplicada no teste diagnóstico (APÊNDICE B). Seu objetivo era a de avaliar o nível de evolução dos alunos no que tange a aplicação do conceito de função logaritmo em situações-problemas.

Em nossas intervenções, realizamos diversos problemas onde a aplicação do conceito de funções logarítmicas se fazia necessária. Os exercícios foram extraídos de diversos livros didáticos de matemática utilizados nas escolas da rede pública e privados.

Pudemos observar também que as nossas intervenções mediadas pelos os recursos tecnológicos como o KVA e o *software Winplot* surtiram o resultado esperado. Isso fica bem evidenciado nos resultados dos testes diagnóstico e final onde após termos feito o levantamento quantitativo e qualitativo, explicitamos seu resultado através do Gráfico 12.

No teste diagnóstico, 10,3% dos alunos participantes acertaram todas as letras da questão enquanto que no teste final esse percentual subiu para 77,8%. A quantidade de alunos que erraram toda a questão também diminuiu consideravelmente. 72,4% dos alunos que fizeram a questão no teste diagnóstico erraram por completo o exercício. Já no teste final, o percentual de erros foi bem inferior. Apenas 11,1% dos alunos não obtiveram êxito na solução da questão. Também houve uma redução no número de alunos que deixaram a questão em branco. Registramos que 11,1% dos alunos deixaram de fazer a questão 6 do teste final enquanto que no teste diagnóstico o percentual foi de 17,3%.

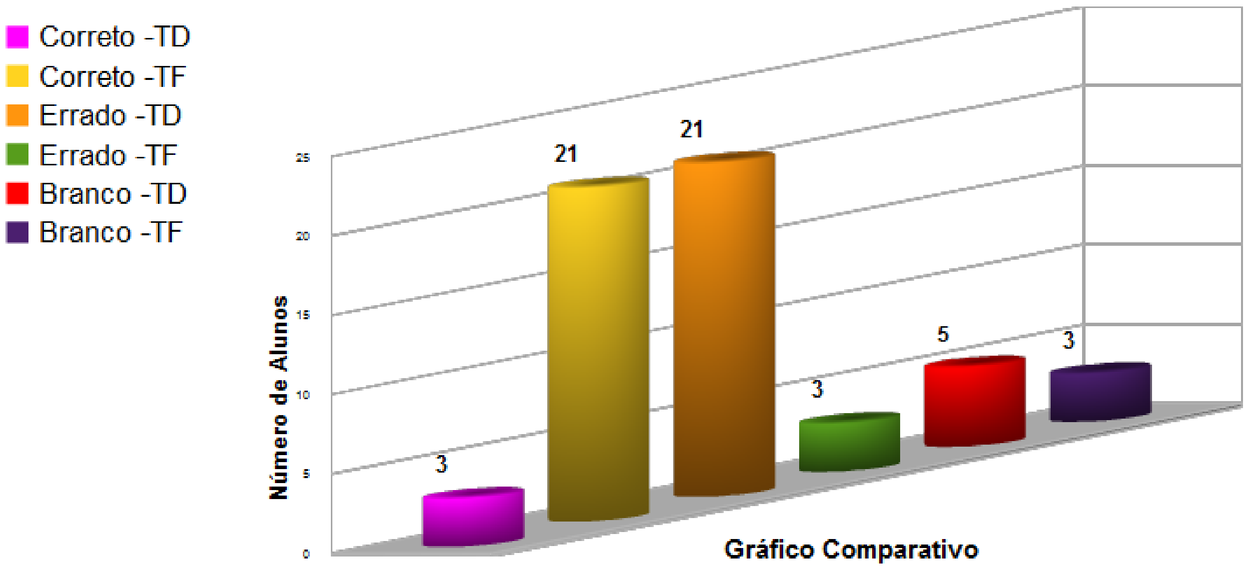


Gráfico 12: Gráfico comparativo dos resultados da questão 6 quando aplicada no TD e no TF

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHO FUTUROS

A partir das análises feitas a partir do teste diagnóstico, constatamos que os alunos, de uma maneira geral, ao ingressarem no ensino superior, apresentam diversas dificuldades inerentes ao conceito de função, em especial, no que se refere ao esboço de alguns gráficos e em sua aplicação em situações-problemas. Muito provavelmente, fruto de um ensino básico ineficiente, desestimulante e desvinculado da realidade. Esse fato incide de forma negativa no desempenho dos alunos, principalmente na disciplina de CDI onde se faz necessário o prévio conhecimento desse conteúdo matemático.

D´Ambrósio (2001) entende que educar é criar estratégias de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo por grupos culturais objetivando se manterem como tal na satisfação de necessidades de sobrevivência e de transcendência. Como consequência disso, Matemática e Educação são estratégias contextualizadas e interdependentes. É com base nesse argumento que elaboramos esse projeto que objetivou analisar o processo de ensino-aprendizagem de funções enfocando as construções gráficas mediadas pela tecnologia e aplicação dos conceitos inerentes a função através de situações-problemas, mobilizando os sujeitos-em-ação a participarem das situações didáticas.

A sequência de ensino foi dividida em três etapas fundamentais: teste diagnóstico, intervenção pedagógica e teste final. Essa estratégia de ensino foi elaborada e aplicada baseando-se no teste diagnóstico onde pudemos fazer um levantamento das possíveis dificuldades destes alunos no que diz respeito às funções. Nossa sequência didática apoiou-se na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, na Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnoud e em alguns pesquisadores da área de tecnologia da educação.

De posse dos resultados obtidos a partir das análises do teste diagnóstico e da constatação da existência dessas dificuldades, nos propusemos a intervir, de alguma forma, no sentido de apresentarmos um projeto interventivo que visava contribuir de maneira contundente e significativa no ensino-aprendizagem do conceito de funções junto a esses alunos. Dessa forma, projetamos nossas sequências de atividades sempre visando à obtenção de uma evolução qualitativa utilizando como apoio metodológico os recursos tecnológicos: *software Winplot* e o KVA. Além desses recursos, propusemos diversas situações-problemas envolvendo funções oriundas de livros didáticos.

O KVA, produto de nossa autoria, foi projetado e criado a partir dos resultados detectados no teste diagnóstico no que tange aos esboços e interpretações gráficas de diversas funções, a fim de dar suporte teórico e prático ao uso do *software Winplot*, apoiando e complementando as aulas expositivas. Além dos fatores supracitados, acrescentamos a pouca disponibilidade de tempo, por parte dos alunos, para se dedicarem de forma necessária aos estudos.

Pudemos constatar, através de depoimentos, que a grande maioria assistiu aos vídeos e julgaram ter sido fundamental para a melhor compreensão do manuseio do *software Winplot*, o que, consequentemente, viabilizou uma melhor análise e interpretação dos diversos entes matemáticos intrínsecos aos tipos de gráficos de funções abordadas em nossas atividades, principalmente na realização das tarefas investigativas que aconteceram no laboratório de informática. Ficou evidenciado para nós que os recursos audiovisuais, como os vídeos tutoriais, podem ser uma excelente ferramenta motivacional, facilitadora e complementar ao processo de ensino-aprendizagem.

Não menos importante, recebemos diversos elogios por parte dos alunos, quanto aos benefícios trazidos pelos *applets*. Esses objetos de aprendizagem[7], também pertencentes ao KVA, foram criados devido à possibilidade de se trabalhar com movimentos de transformações de forma dinâmica e sem a necessidade de se ter o *software* instalado no computador, o que o não acontece com o *Winplot*.

Durante a aplicação das situações didáticas, procuramos fornecer aos sujeitos-em-ação uma grande quantidade de situações-problemas, diferentes dos exemplos fornecidos ao longo da intervenção, onde os mesmos eram levados a refletirem e a conjecturarem, buscando uma alternativa própria para solucioná-los. Acreditamos assim ter oportunizado aos mesmos o favorecimento à fase adidática explicitada por Brousseau (2008). Entendemos que, a partir desse momento, há a ruptura do contrato didático, até aqui estabelecidas entre o professor e aluno, favorecendo a aquisição do saber por parte mesmo.

Constatamos em nossas intervenções, certo medo ou até mesmo “preguiça” por parte de alguns alunos, atitude essa justificada por Franchi (1993), quando afirma que grande parte dos alunos não quer raciocinar, preferindo algo pronto e acabado. Muito provavelmente isso se dá pelo fato do professor, na maioria das vezes, se apresentar como um mero transmissor de conhecimento, conduzindo assim o aluno a se tornar um simples receptor, assumindo dessa forma, uma postura passiva. Quando são instigados a participarem de forma ativa e direta no processo de ensino-aprendizagem em atividades onde os resultados dependem exclusivamente

[7] Segundo Pimenta e Batista (2004), objetos de aprendizagem são unidades de pequena dimensão, desenhadas e desenvolvidas de forma a fomentar a sua reutilização, eventualmente em mais do que um curso ou em contextos diferentes, e passíveis de combinação e/ou articulação e com outros OAs de modo a formar unidades mais complexas e extensas.

de suas ações, a aula segue em ritmo moroso, pois não estão habituados a agir e nem sempre sabem o que fazer ou por onde começar.

Chevallard (2001) ressalta a importância da conduta do professor junto à elaboração e organização de situações didáticas que promovam um aprendizado significativo. Segundo ele, o professor assume um papel fundamental nesse paradigma educacional, pois ele influencia o aluno, através de sua conduta, a entender e interpretar o saber matemático.

Durante a fase de planejamento das situações didáticas para se trabalhar funções, concluímos que é imprescindível que o docente organize suas intervenções na perspectiva das situações didáticas e adidáticas, propondo ao seu alunado, atividades onde os mesmos possam atuar de forma ativa e autônoma, possibilitando que aos poucos construam seu aprendizado através de procedimentos investigativos, de tentativas e descobertas. Vale ressaltar que o sucesso no ensino está intimamente ligado a prática docente e o modo pelo qual o professor conduz sua aula e se comporta na tríade professor-aluno-saber.

Quanto às tarefas realizadas no laboratório de informática, propusemos uma dinâmica investigativa e colaborativa, buscando sempre a confirmação de conjecturas. Pudemos constatar o que foi dito por Franchi (1993). Muitos encontraram dificuldades no desenvolvimento das atividades junto ao *software Winplot*, afirmações como “eu nunca mexi nesse programa”, “isso está certo, professor?” comprovam a forma tradicionalista e estática com que a Matemática vem sendo abordada em nosso ensino médio. Contudo, constatamos que estas atividades contribuíram demasiadamente para a compreensão do comportamento dos gráficos de funções além de se apresentar como uma atividade motivadora e inédita para a grande maioria dos sujeitos-em-ação.

O suporte fornecido pelos *softwares* e outros recursos tecnológicos utilizados em nossa pesquisa, não só auxiliaram os alunos na superação de obstáculos referentes ao processo de aquisição do saber (explicitado nos resultados obtidos no teste final) como também viabilizou, significativamente, a apropriação de conceitos. Os resultados obtidos superaram positivamente nossas expectativas.

Dentre as dificuldades que detectamos por parte dos alunos quanto à realização das atividades propostas, damos destaque a inabilidade por grande parte destes em operar com números racionais, seja na forma decimal ou fracionária, o que influenciou de forma direta e negativamente nos resultados. A falta de cuidado dos alunos quanto à construção dos gráficos no plano cartesiano principalmente na simetria entre os pontos pertencentes aos eixos ortogonais, a dificuldade em distinguir as variáveis dependentes e independentes principalmente na contextualização de tais conceitos e a dificuldade em formalização da linguagem através de símbolos matemáticos também foram fatores negativos.

Os alunos entenderam que um dos objetivos desse projeto foi apresentar uma forma mais eficiente e objetiva para o esboço de determinadas funções através das transformações geométricas no plano, o que beneficiaria de forma direta na disciplina de CDI, tendo como um recurso auxiliador a utilização da tecnologia. No entanto, mesmo nos posicionando com relutância e combalindo o uso excessivo e desnecessário da tabela, para o esboço dos gráficos, nossa intenção não foi propor a exclusão da tabela no ensino curricular tradicional, e sim, mostrar que ela não é a única forma de traçar gráficos e que existem outros métodos capazes de tornar o processo de sua construção menos entediante e imprecisa. Quanto às situações-problemas, entendemos que estes devem reportar ao universo do aluno favorecendo a construção do saber concernente às funções de forma mais empolgante e desafiadora.

Houve uma considerável evolução por parte dos alunos no que se refere a interpretação gráfica de diversas funções. Atribuímos tal fato ao uso de ferramentas tecnológicas. Outro fator, não menos importante, para o sucesso dos resultados obtidos em nossas intervenções foi, indubitavelmente, o empenho e a dedicação dos alunos participantes durante todas as atividades. Ficou evidente a empolgação e motivação dos alunos participantes pelo projeto desde a apresentação da proposta de intervenção mediada pelos recursos tecnológicos como o *software Winplot*. Alguns se pronunciaram no sentido de exaltar a potencialidade e praticidade do programa e a grande expectativa quanto a sua utilização.

Apesar de não termos obtido expressivos resultados em todos os testes, principalmente nos problemas envolvendo função logarítmica e exponencial, nossas intervenções repercutiram positivamente. Houve um avanço relevante no que se refere ao conceito de funções. Creditamos tal fato às diferentes situações didáticas elaboradas por nós onde valorizamos a dinamização das aulas em detrimento dos métodos tradicionais desestimulantes. Segundo os alunos, essa metodologia de ensino deixa as aulas muito mais atraentes e práticas, o que contribui de forma contundente para a aprendizagem.

Concluímos então que as atividades de interpretação gráfica mediadas pelos recursos tecnológicos concomitantemente aos problemas do cotidiano são muito importantes no ensino de funções, pois através delas podemos incentivar e estimular os futuros professores cumprindo seu papel principal que é proporcionar uma melhor e mais significativa aprendizagem.

Mediante aos resultados obtidos com nossa intervenção, ficou claro a importância dos recursos tecnológicos como os *software* matemáticos, *applets* e os vídeos-tutoriais juntos ao aprendizado dos alunos. Lamentamos a falta de tempo que nos impossibilitou de ensiná-los o método que utilizamos para confeccionar os vídeos-tutoriais, tal como os *applets*. Sugerindo estas como uma proposta de trabalho futuro para o curso de formação de professores. Acreditamos que esse recurso seria um objeto fundamental para complementação das aulas presenciais e uma forma a mais para motivá-los em seus estudos.

Esperamos que com este trabalho, possamos contribuir de alguma forma no ensino-aprendizagem da Matemática, principalmente no ensino de funções sob a luz da tecnologia como recurso didático. Sugerimos também que a referida pesquisa possa ser aplicada em outras populações com o propósito de aproximar o aluno do conhecimento intrínseco ao conceito de função.

Ao explicitarmos nossas considerações, entendemos que o fim do presente trabalho seja na verdade o princípio de um caminho que ao ser percorrido possa promover consideráveis contribuições para a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, K. **Uma Aplicação das Inteligências Múltiplas no Aprendizado de Matemática: Representação Gráfica de Função de 1º e 2º Graus**. Dissertação de Mestrado - UFSC. Florianópolis, 2002.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **A Teoria das Situações Didáticas.** São Paulo: PUC-SP, 2004.

_______________________. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Paraná: UFPR, 2007.

ARCAVI, A. **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics**. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., Cuernavaca, Mexico, 1999. *Proceedings…* Cuernavaca; PME, 1999. p. 55-80.

AROEIRA, M. L. C. **Didática de Pré-Escola: Brincar e Aprender.** Ed. FTD, São Paulo, 1996.

AUGUSTO, C.R. **Aprendizagem de Função Afim: Uma Intervenção de Ensino com Auxílio do *Software Graphmatica***. Dissertação de Mestrado - PUC-SP, São Paulo, 2008.

BARALDI, I. M. **Matemática na Escola: que Ciência é Esta?**. Bauru: EDUSC, 1999.

BARBOSA, E. P. **O Conceito de Função na Matemática Elementar no Brasil – Da Reforma Francisco de Campos aos PCNS**. Comunicação; VII Encontro Nacional de Educação Matemática; Sociedade Brasileira de Educação Matemática.; Português; Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.; Rio de Janeiro - RJ; BRASIL; Outro; Comunicação apresentada no VII ENEM. Período de 19 a 23/07/2001..

BARBOSA, G. S. **O Teorema Fundamental da Aritmética: Jogos e Problemas com Alunos do Sexto Ano do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. PUC/SP, São Paulo, 2008.

BASTOS, R. **Transformações Geométricas**. Notas Sobre o Ensino da Geometria. Grupo de Trabalho de Geometria da APM. Educação e Matemática, nº.4. Set/Out, 2007.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L. C. **Uma experiência com *software* educativo na formação continuada de professores de matemática.** Em: “Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática”. vol.II, SBEM, 1998.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 3ª Ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BORGES, M. K. e FONTANA, K. B. **Interatividade na Prática: a Construção de um Texto Colaborativo por Alunos da Educação a Distância**. In X Congresso Internacional da Associação Brasileira de Educação a Distância – ABED. Porto Alegre, 2003.

BRAGA, Ciro. **Função – A Alma do Ensino da Matemática**. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN+Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos**

Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____________________________________, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; v. 2 Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias /. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

_____________________________________, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BROLEZZI, A. C. **Funções e Gráficos**. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. vol. 1, São Paulo, 2004.

BROSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

______________. **Théorie des Situations Didactiques**. Grenoble: Pensée Sauvage, 1998.

BUENO, R. W. S. **As Múltiplas Representações e a Construção do Conceito de Função**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ciência - PUC/RS. Porto Alegre-RS, 2009.

CANAVARRO, P. **Concepções e Prática de Professores de Matemática: Três Estudos de Caso.** (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 1993.

CANOVA, R. R. **Crença, Concepção e Competência dos Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental com Relação à Fração.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP. São Paulo, 2006.

CARVALHO, C. **Comunicações e Interações Sociais nas Aulas de Matemática**. Conferência - I Seminário de Ensino de Matemática no âmbito da 14ª Conferência COLE Campinas/SP, 2003. http://cie.fc.ul.pt/membros/ccarvalho/docc53.pdf. Último acesso em: 28 mar. 2011.

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN, J. **Estudar Matemática: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Ed. ArtMed. Porto Alegre, 2001.

CYSNEIROS, P.G. **Professores e Máquinas: Uma Concepção de Informática na Educação.** III Congresso da RIBIE – Rede IBERO-AMERICANA de Informática Educativa. Barraquilla, Colômbia, 1996.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de Estudantes Universitários sobre o Conceito de Função**. Dissertação em Educação Matemática - PUC/SP. São Paulo, 2004.

D´AMBROSIO, U. **Educação Matemática – Da Teoria à Prática**. 8ª Ed. Editora Papirus. Campinas-SP, 2001.

D´AMORE, B. **Epistemologia, Didática da Matemática e Prática de Ensino**. Bolema. Boletim de Educação Matemática. Vol. 20, nº 28, 1179-205. ISS: 0103-636x. São Paulo, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2008.

DRUCKER, P. F. **Introdução à Administração.** Tradução de Carlos A. Malferrari. Ed. São Paulo: Pioneira, 1998

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática – Representação e Construção em Geometria**. Ed. ArtMed. Porto Alegre-RS, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. e GOTTLIEB, F. C. **Guias de Estudo de Matemática - Relações e Funções**. Ed. Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro, 2007.

FOSSA, J. A. e FOSSA, M. G. **Funções, Equações e Regras. Ensaios Sobre a Educação Matemática.** Belém: PA EDUEPA, 2001.

FRANCHI, R. H. O. L. **A Modelagem Matemática como Estratégia de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia**. Dissertação de Mestrado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP. Rio Claro, 1993.

FREIRE, F.M.P. e PRADO, M.E.B.B. **Professores Construcionistas: a Formação em Serviço**. Actas do III Congresso Ibero-Americano de Informática Educativa. Barraquilla, Colômbia, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. 13ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, J. L. M. **Situações Didáticas**. In: MACHADO, Silvia Dias A. **Educação Matemática**: **uma Introdução**. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002.

FUSARI, J. C. **Séries Idéias.** N.08, São Paulo: FDE, 1988.

GAUDÊNCIO, R. **Um Estudo Sobre a Construção do Conceito de Função.** Tese de Doutorado. Universidade Federal UFRN. Natal, 2000.

GÁLVEZ, Grecia. **A Didática da Matemática**. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. **Breve Bibliografia Comentada Sobre o Uso de Tecnologias Computacionais no Ensino de Matemática Avançada.** In: "Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática", SBEM, 2004.

GOLDBERG, M. C. **Educação e Qualidade: Repensando Conceitos**. Revista brasileira de estudos pedagógicos. v. 79, p. 35-45. São Paulo, set./dez. 1998.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. **Cálculo Zero: uma Experiência Pedagógica com Calouros nos Cursos de Engenharia**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 33, 2005, Campina Grande. *Anais*... Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM

GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. In: Rede Iberoamericana de Informática Educativa, 4. Brasília. Anais eletrônicos do IV Congresso RIBIE, p. 1-16. Brasília, 1998.

GRAVINA, M. A. **O Quanto Precisamos de Tabelas na Construção de Gráficos de Funções?** IN: Revista do Professor de Matemática. N.17, p. 62, 1990.

HARGREAVES, A. **Professorado, Cultura y Postmodernidad.** Madrid: Ed. Morata, 1995.

HASCHE, F. **Aprendizagem de Funções Reais Utilizando Geometria Dinâmica**. Disponível na Internet. http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/39.pdf. Último acesso em: 31/04/2011.

JUNIOR, G. D. C. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e o Planejamento Didático**. Disponível em http://www.redecatolicadeeducacao.com.br/admin/pdf/ago_2008.pdf. Último acesso em: 05/04/2011.

JÚNIOR, G. D. C. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e o Planejamento Didático.** Artigo, Rede Católica de Educação, 2008. Disponível em: <http://www.redecatolicadeeducacao.com.br/admin/pdf/ago_2008.pdf>. Acessado em: 08/04/2011.

KARRER, M. **Logaritmos: Proposta de uma Seqüência de Ensino Utilizando a Calculadora**. Dissertação de Mestrado no Ensino de Matemática –PUC/SP. São Paulo, 1999.

LAUDARES, I. LACHINI, J. **O Uso do Computador no Ensino de Matemática na Graduação.** In: "23ª Reunião Anual da Associação Nacional de pós-graduação e pesquisa em Educação, 2000.

LÈVY, P. **As Tecnologias da Inteligência: o Futuro do Pensamento na Era da Informática**. Rio de Janeiro. Editora 34, 1996.

MACHADO, C. R. **Teorias de Pesquisa em Educação Matemática: A Influência dos Franceses**. Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf. Último acesso em: 13/10/2010.

MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Artmed Editora. Porto Alegre, 2001.

MEIRA, L. **Aprendizagem e Ensino de Funções**. In: SCHIEMANN, A. (org). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. 2ª Ed. Ampliada. Editora Universitária da UFPE. Recife, 1997.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. Investigações em Ensino de Ciências**; v.7, n.1, 2002. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/Ciencias/Artigos/moreiram.pdf> Acessado em: 03/10/2010.

MOTTA, C. E. M. **A Máquina, a Matemática e o Homem: Interesses e Possibilidades em Diferentes Universos**. Niterói-RJ: UFF/CECIERJ, 2008.

NASCIMENTO, T. C. M. **A Informática no Espaço Escolar. Revista EducaOnline**. ISSN: 1983-2664. Volume 2 – nº. 2 - maio/agosto de 2008.

NOVA, C. e ALVES, L. **Estação *Online*: a "Ciberescrita", as Imagens e a EAD**. Educação *Online*. Org. Silva, M. 2ª Ed. Editora Loyola. São Paulo, 2003.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função: Uma abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP. São Paulo, 1997.

PAIS, L. C. **Introdução**. In: MACHADO, Silvia Dias A. **Educação Matemática: uma Introdução**. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002b, 9-12.

__________. **Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2ª Ed. Editora Autêntica. Belo Horizonte-MG, 2001.

PICOLLI, L. A. P. A Construção de Conceitos em Matemática: Uma Proposta Usando Tecnologia de Informação. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/RS. Porto Alegre, 2006.

PIMENTA, P; BAPTISTA, A. A. **Das Plataformas de *E-leaning* aos Objetos de Aprendizagem**. In. DIAS, Ana Augusta Silva e GOMES, Maria João. E-Learning para e-formadores. Minho, TecMinho, 2004, p. 97-109.

PINTO, N. B. **Contrato Didático ou Contrato Pedagógico?** In: Revista Diálogo Educacional. v. 4, n.10, Curitiba, 2003.

POMMER, W. M. **Brousseau e a Ideia de Situação Didática**. SEMA: Seminários de Ensino de Matemática/FEUSP 2º semestre 2008. Disponível em: http://www.nilsonmachado.net/sema20080902.pdf. Último acesso em: 15/03/2001.

PONTE, J. P. **O Computador como Ferramenta: uma Proposta Bem Sucedida?** Inovação, 1989.

___________. **A Investigação Sobre o Professor de Matemática: Problemas e Perspectivas.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2000.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., & VARANDAS, J. M. **O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional**. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: 2003.

RAMAL, A. C. **Avaliar na Cibercultura.** Revista Pátio, Ed. Artmed, Porto Alegre, 2000.

SANTOS, B.S. **Os Processos da Globalização. A Globalização e As Ciências Sociais**. São Paulo: Cortez, 2002. p. 25-104.

SILVA, B. A. et al. **Atividade para o Estudo de funções em Ambiente Computacional**. Ed. Iglu. São Paulo, 2002.

SILVA, M. C. **O Ensino e a Aprendizagem de Funções: Considerações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais e Pesquisas Desenvolvidas na Educação Matemática**. PsicoGlobal: Pt, v. 202, p. 1-11, 2008.

SOUZA, H. G. de. **Informática na Educação e Ensino de Informática: Algumas Questões.** Brasília: ano 2, n. 17, jul. 1983.

VALENTE, J. A. **O Computador na Sociedade do Conhecimento.** Campinas: NIED/UNICAMP, 1999.

____________. **Por que Computadores na Educação?** In: VALENTE, J. A. (org). Computadores e conhecimento: Repensando a educação. Campinas/SP: UNICAMP, 1993.

VERGNAUD, G. **A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education**. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2): 167-181. 1998.

_______________. ***Theorical Framewooks and Empirical Facts in the Psychology of Mathematics Education***. Proceedings of the International Congress on Mathematical Education (ICME VI), Budapest, p. 39-41, 1988.

______________. ***A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems***. In: addition and subtraction. A cognitive perspective. Carpenter, T.; Moser, J.; Rosemberg, T. (eds). Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1982.

______________. ***La Théorie Des Champs Conceptuels. Recherches En Didactique Des Mathematiques***. Grenoble, La Pensée Sauvage, n.º 6, vol. 10, nº 2, p. 138-170, 1990.

______________. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, p. 1-26, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

APÊNDICE

APÊNDICE A - INFORMAÇÕES DO PARTICIPANTE

CÓDIGO: ______

Nome do Participante: _______________________________ **Série/Período: ________________**

Responda os itens a seguir.

1) Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

2) Idade:

( ) até 20 anos

( ) de 21 a 30 anos

( ) de 31 a 40 anos

( ) de 41 a 50 anos

( ) mais de 50 anos

3) Em que tipo de escola você concluiu o Ensino Médio (antigo 2º Grau)?

( ) Municipal

( ) Estadual

( ) Federal

( ) Privada

4) Qual curso de Ensino Médio você concluiu?

( ) Técnico

( ) Magistério

( ) Científico

5) Em que ano você concluiu seu Ensino Médio?

____

6) Como você classificaria a qualidade do ensino da disciplina Matemática na escola onde você concluiu o Ensino Médio?

( ) Ruim

( ) Regular

( ) Boa

( ) Ótima

Justifique:

____

____

____

____

____

7) Assinale a(s) metodologia(s) de ensino utilizada pelo professor ao ensinar o conteúdo Funções no ensino fundamental e médio?

( ) Aula expositiva, com o quadro-negro e giz.

( ) Pesquisa científica

( ) Trabalho em grupos

( ) Resolução de problemas

( ) Utilização de *softwares*

( ) Outro(s). Qual(is)?

____

8) Com qual freqüência o professor de matemática utilizava o livro didático?

( ) Nunca

( ) Poucas vezes

( ) Muitas vezes

( ) Sempre

Se utilizava, qual o nome do livro?

____

____

9) Local de Residência: ____

10) Área:

( ) urbana ( ) rural

11) Local de Trabalho: ____

12) Estado Civil:

( ) solteiro ( ) viúvo

( ) casado ( ) separado ( ) outro: _________________________

13) Quantos filhos você tem?

( ) 0	( ) 2	( ) 4
( ) 1	( ) 3	( ) mais

14) Em que disciplina você encontrou maior dificuldade no Ensino Fundamental?

( ) Matemática	( ) Português	( ) História	( ) Geografia
( ) Inglês	( ) Ciências	( ) Religião	( ) Nenhuma

( ) outra Qual? ________________________________

15) Qual disciplina você teve mais facilidade no Ensino Fundamental?

( ) Matemática	( ) Português	( ) História	( ) Geografia
( ) Inglês	( ) Ciências	( ) Religião	( ) Nenhuma

( ) outra Qual? ________________________________

16) Em que disciplina você encontrou maior dificuldade no Ensino Médiol?

( ) Matemática	( ) Português	( ) História	( ) Geografia
( ) Inglês	( ) Literatura	( ) Filosofia	( ) Física
( ) Química	( ) Psicologia	( ) Contabilidade	( ) Biologia
( ) Prática de Ensino	( ) Legislação	( ) Ed. Artística	( ) Nenhuma

( ) outra Qual? ________________________________

17) Qual disciplina você teve mais facilidade no Ensino Médio?

( ) Matemática	( ) Português	( ) História	( ) Geografia
( ) Inglês	( ) Literatura	( ) Filosofia	( ) Física
( ) Química	( ) Psicologia	( ) Contabilidade	( ) Biologia
( ) Prática de Ensino	( ) Legislação	( ) Ed. Artística	( ) Nenhuma

( ) outra Qual? ________________________________

18) O que o levou a optar pelo curso de Licenciatura em Matemática?

( ) Vocação	( ) Status Profissional
( ) Ampliação do mercado prof.	( ) realização de um sonho
( ) Influência de Familiares	( ) Exigência Legal
( ) Aprimoramento profissional	( ) outro: Qual? ____________________________

19) Quantos horas semanais, em média, você costuma dedicar aos estudos, excetuando-se as horas de aula?

( ) 2 a 4	( ) 5 a 7	( ) 8 a 9	( ) mais de 10

20) Qual a escolaridade da sua mãe?

( ) Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever.
( ) Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever.
( ) 1ª a 4ª série (completo)
( ) 1ª a 4ª série (incompleto)
( ) 5ª a 8ª série (completo)
( ) 5ª a 8ª série (incompleto)
( ) Ensino Médio (completo)
( ) Ensino Médio (incompleto)
( ) Ensino Superior (completo)
( ) Ensino Superior (incompleto)
( ) Desconheço essa informação

21) Qual a escolaridade do seu pai?

( ) Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever.
( ) Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever.
( ) 1ª a 4ª série (completo)
( ) 1ª a 4ª série (incompleto)
( ) 5ª a 8ª série (completo)
( ) 5ª a 8ª série (incompleto)
( ) Ensino Médio (completo)
( ) Ensino Médio (incompleto)
( ) Ensino Superior (completo)
( ) Ensino Superior (incompleto)
( ) Desconheço essa informação

22) Você já estudou Transformações Geométricas em Funções no ensino básico?

( ) Sim ( ) Não Obs: ____

23) Com qual frequência o professor de matemática utilizava situações-problemas como aplicação do conteúdo funções?

( ) Sempre ( ) Às vezes ( ) Nunca

Comentário:

____

____

____

ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

TURMA ANALISADA: 3º Período de Matemática

Nº DE ALUNOS: 28

CÓDIGOS DE IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE	**ESM(nº): Ensino Superior Matemática**

Resultado do questionário referente às informações do participante.

Resposta da questão 1

Sexo	Alunos	Porcentagem
Masculino	08	28,6%
Feminino	20	71,4%

Resposta da questão 2

Faixa Etária	Alunos	Porcentagem
até 20 anos	15	53,6%
de 21 a 30 anos	09	32,1%
de 31 a 40 anos	03	10,7%
de 41 a 50 anos	01	3,6%
mais de 50 anos	00	0%

Resposta da questão 3

Escola	Alunos	Porcentagem
Municipal	02	7,1%
Estadual	26	92,9%
Federal	00	0%
Privada	00	0%

Resposta da questão 4

Curso	Alunos	Porcentagem
Técnico	02	6,9%
Magistério	05	17,2%
Científico	21	72,3%
Supletivo	01	3,4%

OBS: O participante ESM02 possui Magistério e Científico.

Resposta da questão 5

Período (ano)	Alunos	Porcentagem
de 2004 a 2008	21	75%
de 1999 a 2003	03	10,7%
antes de 1998	04	14,3%

Resposta da questão 6

Classificação	Alunos	Porcentagem
Ruim	05	17,8%
Regular	11	39,3%
Boa	12	42,9%
Ótima	00	0%

Justifique:

Comentários:

- Dos 27 alunos participantes, 23 disseram que o ensino da disciplina Matemática do Ensino Médio, na ocasião em que cursaram, foi regular ou boa.
- Todos os alunos participantes cursaram o Ensino Médio em escolas da rede pública.

Dentre os pontos negativos descritos pelos participantes, destaca-se:

- A ausência ou fraca abordagem dos conteúdos intrínsecos as geometrias (Figura xx) ;
- Os participantes que concluíram os cursos de magistérios ou projetos como EJA (Ensino de Jovens e Adultos) alegam que os conteúdos de matemática ministrados são extremamente superficiais;
- Os conteúdos disciplinares são abordados com muita superficialidade ou às vezes omitidos nos cursos noturnos;
- Trocas constantes de professores;
- A ementa do curso não foi toda contemplada.

Dentre os poucos pontos positivos destacados pelos participantes, destaca-se o comprometimento dos professores quanto ao ensino de qualidade.

Alguns comentários:

O cronograma não foi todo aplicado e as
matérias foram passadas vagamente.

Figura 1: Comentário do aluno ESM02

Faltou geometria espacial e faltou geometria analítica.

Figura 2: Comentário do aluno ESM03

Pois haviam poucas aulas de matemática de-
vido ao curso que conclui, a carga horária dessa
disciplina era mínima.

Figura 3: Comentário do aluno ESM06

Estudei a noite e a matemática foi muito básica,
corrida.

Figura 4: Comentário do aluno ESM09

Boa, porém houve mudança de professor
que prejudicou um pouco o desempe-
nho da turma.

Figura 5: comentário do aluno ESM26

Resposta da questão 7

Recurso Pedagógico	Alunos	Porcentagem
Aula expositiva, com o quadro-negro e giz.	24	85,7%
Pesquisa científica	00	0%
Trabalhos em grupo	08	28,6%
Resolução de problemas	14	50%
Utilização de *softwares*	00	0%
Outros(s). Qual(s)?	01	3,6%
Em branco	01	3,6%

OBS: Os participantes puderam marcar mais que uma alternativa.
O aluno ESM07 marcou a opção "OUTROS". Ele fez o curso de supletivo.

Resposta da questão 8

Frequência	Alunos	Porcentagem
Nunca	05	17,9%
Poucas vezes	09	32,1%
Muitas vezes	08	28,6%
Sempre	05	17,8%
Em branco	01	3,6%

Se utilizava, qual o nome do livro adotado pelo professor?

- Apenas 7 alunos se lembravam do livro utilizado. Os autores citados foram: Barreto Silva, Dante, Manuel Paiva e Iezzy.
- A grande maioria não se recordaram do livro utilizado, outros disseram que as instituições onde concluíram o ensino médio não adotavam livros didáticos.

Resposta da questão 9

Resultado	Alunos	Porcentagem
Sim	01	3,7%
Não	26	96,3%

4 alunos participantes afirmam que não se recordam de ter estudado. Ambos marcaram a opção “Não”.

Resposta da questão 10

Resultado	Alunos	Porcentagem
Sempre	03	11,1%
Às vezes	16	59,3%
Nunca	08	29,6%

Resposta da questão 11

Cidade	Distância da Faculdade	Alunos	Porcentagem
Além Paraíba-MG	(sede)	05	18,5%
Carmo-RJ	20 km	08	29,6%
Cordeiro-RJ	60 km	01	3,7%
São José do Vale do Rio Preto-RJ	70 km	03	11,1%
Sapucaia-RJ	28 km	07	26%
Volta Grande-MG	20 km	03	11,1%

Resposta da questão 12

Urbana	Rural
25	02
92,6%	17,4%

Resposta da questão 13

Local	Alunos	Porcentagem
Cidade onde reside	21	77,8%
Fora da cidade onde reside	01	3,7%
Não trabalha	05	18,5%

Resposta da questão 14

Estado Civil	Alunos	Porcentagem
Solteiro	20	74,1%
Casado	06	22,2%
Viúvo	00	0%
Separado/Divorciado	01	3,7%

Resposta da questão 15

Filhos	Alunos	Porcentagem
Não possui filho	25	92,6%
01 filho	02	7,4%

Resposta da questão 16

Disciplinas	Alunos	Porcentagem
Português	08	29,6%
Matemática	02	7,4%
Geografia	02	7,4%
Inglês	07	25,9%
História	01	3,8%
Nenhuma	07	25,9%

Resposta da questão 17

Disciplinas	Alunos	Porcentagem
Matemática	21	77,8%
Português	02	7,4%
Inglês	03	11,1%
Religião	01	3,7%

Resposta da questão 18

Disciplinas	Alunos	Porcentagem
Química	12	44,5%
Física	05	18,5%
História	01	3,7%
Inglês	02	7,4%
Matemática	01	3,7%
Literatura	02	7,4%
Biologia	03	11,1%
Nenhuma	01	3,7%

Resposta da questão 19

Disciplinas	Alunos	Porcentagem
Matemática	20	74,1%
Português	02	7,4%
Ed. Artística	01	3,7%
Inglês	01	3,7%
História	01	3,7%
Física	02	7,4%

Resposta da questão 20

Opções	Alunos	Porcentagem
Aprimoramento Profissional	05	18,5%
Vocação	09	33,3%
Ampliação para o mercado de trabalho	06	22,1%
Realização de um sonho	05	18,5%
Outros	02	7,4%

Resposta da questão 21

Horas de estudos semanais	Alunos	Porcentagem
2 a 4 horas	23	85,2%
5 a 7 horas	03	11,1%
Mais de 10 horas	01	3,7%

Resposta da questão 22

Nível de Escolaridade da Mãe	Alunos	Porcentagem
Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever	01	3,7%
Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever	01	3,7%
1ª a 4ª série (completo)	05	18,5%
1ª a 4ª série (incompleto)	00	0%
5ª a 8ª série (completo)	06	22,2%
5ª a 8ª série (incompleto)	04	14,8%
Ensino Médio (completo)	08	29,7%
Ensino Médio (incompleto)	01	3,7%
Ensino Superior (completo)	00	0%
Ensino Superior (incompleto)	01	3,7%
Desconhece a informação	00	0%

Resposta da questão 23

Nível de Escolaridade do Pai	Alunos	Porcentagem
Nunca foi a escola e não sabe ler e nem escrever.	01	3,7%
Nunca foi a escola, mas sabe ler e escrever.	00	0%
1ª a 4ª série (completo)	04	14,8%
1ª a 4ª série (incompleto)	06	22,2%
5ª a 8ª série (completo)	04	14,8%
5ª a 8ª série (incompleto)	05	18,6%
Ensino Médio (completo)	02	7,4%
Ensino Médio (incompleto)	01	3,7%
Ensino Superior (completo)	01	3,7%
Ensino Superior (incompleto)	00	0%
Desconhece a informação	03	11,1%

APÊNDICE B - TESTE DIAGNÓSTICO SOBRE FUNÇÕES

CÓDIGO: ______

Nome do Participante: ___________________________________ **Série/Período: ________________**

1) Conceitue funções.

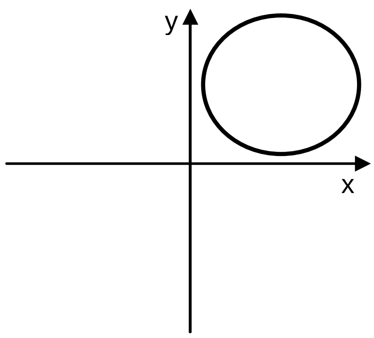
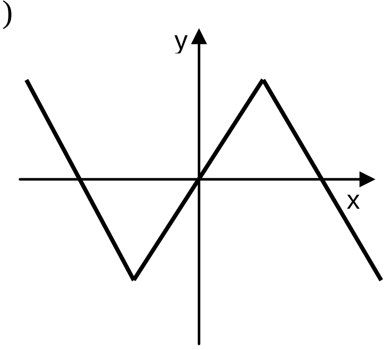
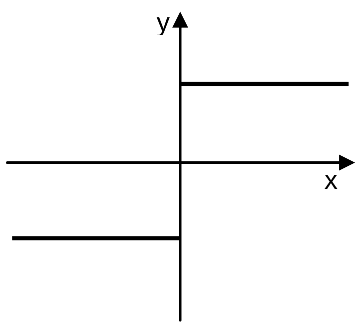
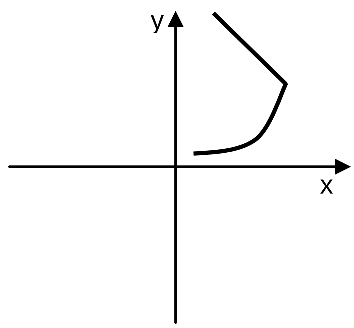
____

____

____

2) Há maneiras distintas de indicar uma função, como por exemplo: uma tabela, um diagrama, uma fórmula ou um gráfico cartesiano. Você pode nos fornecer 4 exemplos de função, cada um indicado de um modo diferente como os apresentados acima? Ou seja: um exemplo de função indicado por tabela; um exemplo de função indicado por um diagrama; um exemplo de função indicado por uma fórmula e um exemplo de função indicado por um gráfico cartesiano.

3) Todos os gráficos dados a seguir representam uma relação entre y e x. Assinale os que representam uma função e justifique sua resposta.

<table>
<tr>
<td>a) (   )

</td>
<td>b) (   )

</td>
</tr>
<tr>
<td>c) (   )

</td>
<td>d) (   )

</td>
</tr>
</table>

Justificativa: ____

____

____

OBS: O domínio de todas as funções é R.

4) A despesa mensal de uma pequena empresa com encargos sociais é dada pela função $D(x) = 20 + \frac{x}{10}$, em que D(x) é a despesa em milhões de reais e x é o número de funcionários.

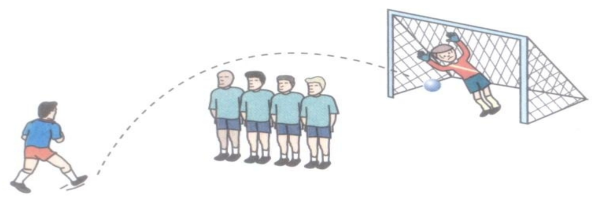
a. Qual será a despesa quando a empresa tiver 100 funcionários?

b. Qual será o número de funcionários quando a despesa dessa empresa for 50 millões de reais?

c. Construa o gráfico da função D para $5 \leq x \leq 10$.

(Fonte: Matemática - Manuel Paiva – Volume Único – pág. 84)

5) A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola.



Supondo que a relação da altura h, (metros) e o tempo (segundos) após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determinar:

a. Em que instante a bola atinge a altura máxima;
b. O valor da altura máxima atingida pela bola.

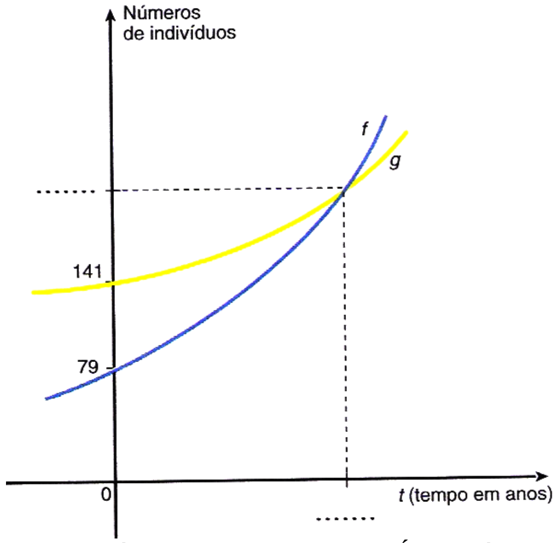
(Para refletir 5º)Livro do Dante (volume único). Pág. 86

6) Esboce as seguintes funções:

a) $f(x) = -|2x - 6|$ b) $f(x) = \frac{x}{2} - 2$ c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ d) $f(x) = 2^x$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

7) As pesquisas de um antropólogo revelaram que as populações indígenas de duas reservas, A e B, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, e as expressões f(t) e g(t) representam o número de indivíduos dessas reservas, respectivamente.

a. Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de f(t) e g(t) são formados por pontos das curvas indicadas a seguir por f e g, respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, por que f(t) e g(t) só podem assumir valores naturais. Complete esta figura com as coordenadas do ponto comum a f e g.



Fonte: Matemática - Manuel Paiva – Volume Único – pág. 103/104

b. Daqui a quantos anos as duas reservas terão o mesmo número de indivíduos?

c. Daqui a 7 anos, qual será o número de indivíduos da reserva A?

8) (U.F. São Carlos-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$, com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, qual foi o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

APÊNDICE C – TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU

Esboce as funções afim abaixo, utilizando o conceito de transformações geométricas no plano e faça os comentários acerca dos movimentos ocorridos, ao lado.

a) $y = 3x$

b) $y = 4x - 1$

c) $y = -2x - 3$

d) $y = \dfrac{x-2}{2}$

APÊNDICE D – TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU

Esboce as funções quadráticas abaixo na folha quadriculada que segue, utilizando o conceito de transformações geométricas no plano e faça os comentários acerca dos movimentos ocorridos. Converta as funções que estão na forma geral para a forma canônica. Utilize a folha de ofício branca como rascunho.

a) $y = x^2 - 10x + 25$

b) $y = x^2 - 6x + 10$

c) $y = 2x^2 - 4x + 6$

d) $y = 3x^2 - 10x + 5$

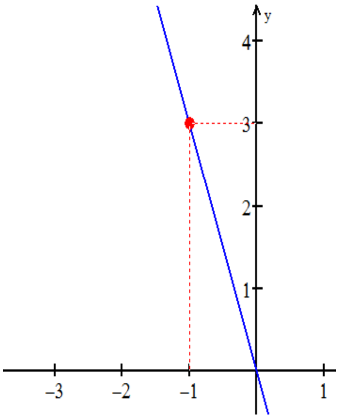
APÊNDICE E – EXERCÍCIOS - SITUAÇÃO-PROBLEMA COM FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º e 2º GRAU

1) (UF-MS) Para custear seus estudos, um estudante oferece serviços de digitação de textos. O preço a ser pago pela digitação de um texto inclui uma parcela fixa e outra parcela que depende do número de páginas digitadas. Se a parcela fixa for de R$ 4,00 e cada página digitada custar R$ 1,60, então a quantidade de páginas digitadas de um texto, cujo serviço de digitação custou R$ 39,20, será igual a quanto?

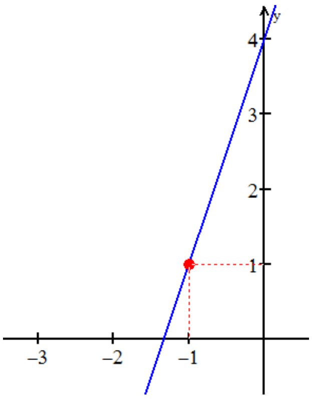
(questão retirada do livro de Gelson Iezzi, 1º ano EM, ano 2006, pág.77)

2) Obtenha, em cada caso, a lei da função cujo gráfico é mostrado a seguir:

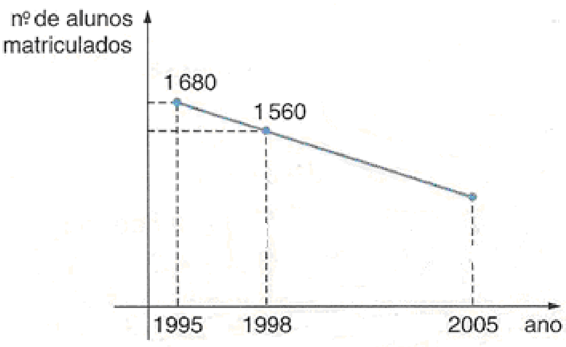
a.



b.



3) Durante uma década, verificou-se que um colégio apresentou um decréscimo linear no número de matrículas, como mostra o gráfico seguinte:



a) Quantos alunos a escola possuía em 2001?

b) Quantos alunos a escola perdeu de 1995 a 2005?

(questão retirada do livro de Gelson Iezzi, 1º ano EM, ano 2006, pág.63 - ADAPTADA)

4) A tabela abaixo fornece a posição S(t), em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 da estrada em que se movimenta, para vários instantes t (em h).

t(h)	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
s(t) (km)	50	100	150	200	250	300

a. Qual é a função horária que descreve a posição desse veículo em função do tempo?

b. Em que instante o veículo ocupará a posição S = 500km?

(questão retirada do livro de Gelson Iezzi, 1º ano EM, ano 2006, pág.63)

5) Existem objetos que se desvalorizam com o passar do tempo, como, por exemplo, carros, eletrodomésticos, entre outros. Essa perda de valor ao longo do tempo é chamada de depreciação e pode ser representada por uma função afim. No caso deste exercício, $y = at + b$ é decrescente.

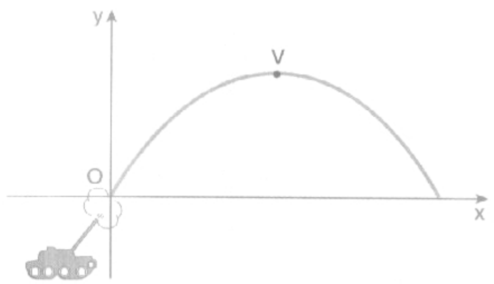
O valor de um som hoje é R$ 3.000,00; daqui a 10 anos será R$ 600,00. Admitindo-se a depreciação linear:

a. Represente essa depreciação por uma função do 1º grau?
b. Qual o valor do som daqui a 3 anos?
c. Qual é o total da sua depreciação aos 10 anos?
d. Daqui a quanto tempo o som não terá mais nenhum valor?

(Fainguelernt, E. K. e Gottlieb, F. C., Guias de estudo de Matemática – Relações e Funções, ano 2007, pág.153)

6) Uma bala é atirada de um canhão (como mostra a figura) e descreve uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (sendo x e y medidos em metros).

Vamos determinar:



a) a altura máxima atingida pela bala.

b) o alcance do disparo.

(Matemática: Ciências e Aplicações, ano 2006, pág.92 –Exemplo11)

7) Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, calcule:

a. A quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo

b. o valor mínimo do custo.

(Matemática: Dante, Vol. Único, ano 2008, pág.87, nº 61)

8) Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$. Determine:

a. O instante em que a bola atinge a sua altura máxima;
b. A altura máxima atingida pela bola;
c. Quantos segundos depois do lançamento ela toca o solo.

(Matemática: Dante, Vol. Único, ano 2008, pág.87, nº 61)

9) Para uma partida de futebol na praia, devo demarcar uma região retangular utilizando uma corda de 100m. Qual a área **máxima** desse campo de futebol? Quais serão as dimensões do campo de área máxima?

(Matemática 1: Manuel Paiva, , pág.185, exercício resolvido R.4)

10) Considere todos os retângulos de perímetro 40 cm. Quais devem ser as suas dimensões a fim de que a área seja máxima?

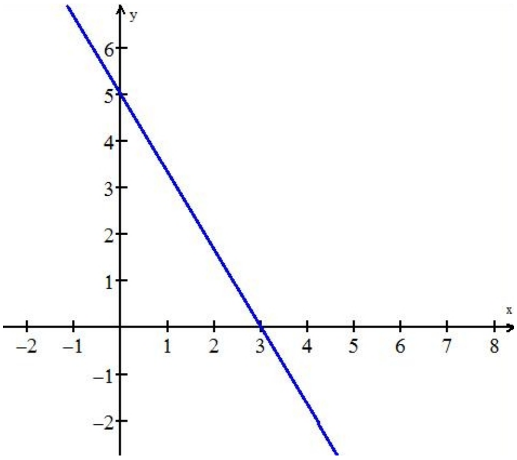
(questão retirada do livro de Gelson Iezzi, 1º ano EM, ano 2006, pág.94, nº 45)

APÊNDICE F - TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE APLICAÇÕES DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICAS

CÓDIGO: ______

Nome: ____

1) Determine a lei de associação do gráfico abaixo



2) (FAAP-SP) Uma empresa pretende alugar um veículo por certo período. A locadora "Aloca" apresentou a seguinte proposta: R$ 1400,00 mais R$ 3,00 por quilômetro percorrido. A proposta da locadora "Reloca" é: R$ 2000,00 mais R$ 1,00 por quilômetro percorrido. Baseado nas propostas acima, qual dos planos é mais vantajoso para um veículo que pretende percorrer 350 km?
(Matemática, Ciência e Aplicação – pág. 78 - ADAPTADO)

3) Sabe-se que, sob certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$. Qual é a altura máxima atingida pela bala? Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?
(Manuel Paiva – pág. 91)

4) Considere todos os retângulos de perímetro 20m. Quais devem ser as suas dimensões a fim de que a área seja máxima?

APÊNDICE G – TESTE DE VERIFICAÇÃO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM FUNÇÕES MODULARES

Enunciado Único) Esboce as seguintes funções e descreva as transformações ocorridas:

a. $y = |x - 3| + 2$

b. $y = |x^2 - 3|$

APÊNDICE H – EXERCÍCIOS - EQUAÇÕES EXPONENCIAIS (PARTE1)

1) Resolva as seguintes equações exponenciais simples:

a. $3^{x-1} = 81$

b. $2^{x^2-3x-4} = 1$

c. $0{,}75^x = \dfrac{9}{16}$

d. $10^{1-x} = \dfrac{1}{10}$

e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4} = 8^{x+2}$

f. $\left(\sqrt{2}\right)^x = 4$

2) Resolva as seguintes equações exponenciais utilizando artifícios de cálculo:

a. $3.4^{x+1} = 96$

b. $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

c. $2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0$

d. $3^{x-2} + 3^{x+1} = 84$

e. $4.2^x + 2^x - 1 = 72$

f. $3^{2x} - 3^x = 6$

APÊNDICE I – EXERCÍCIOS - EQUAÇÕES EXPONENCIAIS (PARTE2)

a) $4^x - 20.2^x + 64 = 0$

Solução: Sabemos que $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Utilizando o artifício de fazer $2^x = y$ (isto chama-se mudança de variável) vem, substituindo: $y^2 - 20y + 64 = 0$. Ora, esta é uma equação do segundo grau cujas raízes são y = 16 ou y = 4. Substituindo na mudança de variável feita acima, teremos: $2^x = 16$ ou $2^x = 4$, de onde tiramos imediatamente que x = 4 ou x = 2. Portanto, o conjunto solução da equação proposta é S = {2; 4}.

b) $2^x - 3 = (2^x - 3)^2$

Solução: Fazendo $2^x - 3 = y$, vem substituindo: $y = y^2$. Daí vem que $y^2 - y = 0$, o que é equivalente a $y(y - 1) = 0$. Ora, para que o produto seja nulo deveremos ter y = 0 ou y = 1. Voltando à mudança de variável teremos: $2^x - 3 = 0$ ou $2^x - 3 = 1$. Vamos resolver cada uma separadamente.

$2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3$; da teoria dos logaritmos tiramos imediatamente que $x = \log_2 3$

$2^x - 3 = 1 \Rightarrow 2^x = 4$, de onde tiramos imediatamente que x = 2. Portanto, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{2; \log_2 3\}$.

c) $3^{x+1} + 81/3^x = 36$

Solução: A equação dada pode ser reescrita como: $3^x \cdot 3^1 + 81/3^x - 36 = 0$

Fazendo a mudança de variável $3^x = y$ vem: $3y + 81/y - 36 = 0$

Multiplicando ambos os membros por $y \neq 0$ (observe que y está no denominador e portanto, não pode ser igual a zero), obteremos: $3y^2 + 81 - 36y = 0$

Arrumando a igualdade anterior fica: $3y^2 - 36y + 81 = 0$. Vejam que podemos simplificar a equação, dividindo ambos os membros por 3, resultando:

$y^2 - 12y + 27 = 0$; ora, esta é uma equação do segundo grau cujas raízes são y = 9 ou y = 3. Voltando à mudança de variável teremos: $3^x = 9$ ou $3^x = 3$. Da primeira vem que x = 2 e da segunda vem que x = 1. Portanto, o conjunto solução da equação proposta é S = {2; 1} ou de uma forma equivalente: S = {1; 2}.

Resolvas as seguintes equações exponenciais

1) $8^x = 0,25$

2) $8^{x^2 - x} = 4^{x+1}$

3) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

4) $4^x - 20.2^x + 64 = 0$

Solução:

1) $8^x = 0,25 \Rightarrow \left(2^3\right)^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{3x} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-2}$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$

2) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

$\Rightarrow \left(2^3\right)^{x^2-x} = \left(2^2\right)^{x+1} \Rightarrow 2^{3(x^2-x)} = 2^{2(x+1)}$

$\Rightarrow 3(x^2 - x) = 2(x+1) \Rightarrow 3x^2 - 3x = 2x + 2$

$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau vem:

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\boxed{S = \{2, -\frac{1}{3}\}}$

3) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

Colocando 3^{x-1} em evidência:

$\Rightarrow 3^{x-1}(1 - 3 + 3^2 + 3^3) = 306$

$\Rightarrow 3^{x-1}.34 = 306 \Rightarrow 3^{x-1} = \frac{306}{34} \Rightarrow 3^{x-1} = 9$

$3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Explicação da evidência acima com 3^{x+1}:

$\frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = 3^{x+1-(x-1)} = 3^{x+1-x+1} = 3^2$

4) $4^x - 20.2^x + 64 = 0$

$\Rightarrow \left(2^2\right)^x - 20.2^x + 64 = 0$

$\Rightarrow \left(2^x\right)^2 - 20.2^x + 64 = 0$

Fazendo $y = 2^x$ obtemos:

$y^2 - 20y + 64 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2}$

$\Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \dfrac{20 \pm 12}{2}$

$\Rightarrow y_1 = 16 = 2^4$ e $y_2 = 4 = 2^2$

Substituindo y_1 e y_2 na equação acima vem:

a) $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

b) $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

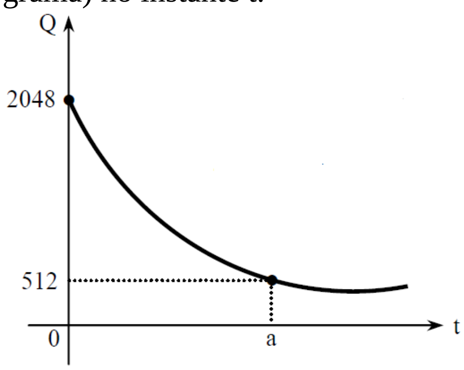
$\boxed{S = \{2, 4\}}$

APÊNDICE J – EXERCÍCIOS – SITUAÇÃO-PROBLEMA COM FUNÇÃO EXPONENCIAL

1) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200.2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38400 bactérias? ***(Livro Matemática Dante pág. 117)***

2) Numa certa cultura, há 1000 bactérias num determinado instante. Após 10 min., existem 4000. Quantas bactérias existirão em 1h, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula $P = P_0.e^{kt}$ em que P é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é a taxa de crescimento?
(Livro Matemática Dante pág. 117)

3) Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K.2^{-0,5t}$, na qual K é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e Q(t) indica a quantidade de substância (em grama) no instante t.



Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e a.

(Livro Matemática Dante pág. 117/118)

4) As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de dois apartamentos **A** e **B** (adquiridos na mesma data), passados **t** anos da data de compra:

apartamento **A** : v= $2^{t+1} + 120$
apartamento **B**: v = $6.2^{t-2} + 248$

a) Por quais valores foram adquiridos os apartamentos **A** e **B** respectivamente?
b) Passados quatro anos da compra, qual deles estará valendo mais?
c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambos tenham iguais valores?

(Livro Matemática Ciências e Aplicações – Gelson Iezzi pág. 152)

5) (Puccamp-SP) Curiosamente, observou-se que o número de árvores plantadas em certo município podia ser estimado pela lei $N = 100.3^t$, em que t corresponde ao respectivo mês de plantio das N árvores. Se para $t = 0$ obtém-se o número de árvores plantadas em maio de 2001, em que mês o número de árvores plantadas foi igual a nove vezes o número das plantadas em julho de 2001?

(Livro Matemática Ciências e Aplicações – Gelson Iezzi pág. 157)

APÊNDICE K – ATIVIDADE NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL y = a^x

CÓDIGO: ______

Nome: ____

Definição:

A função $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada *função exponencial* de base *a*.

Dinâmica da atividade:

Após ter instalado e observado os vídeos tutoriais e o *applet* referente a função exponencial $y = a^x$ disponibilizados no site www.profwendel.com.br, abra o *Winplot* e esboce a função $y = a^x$ (digite a^x). Varie o coeficiente "a" e responda as seguintes perguntas:

1) O que acontece com o gráfico da função quando variamos a > 1?

____
____
____
____

2) O que acontece com o gráfico da função quando variamos 0 < a < 1?

____
____
____

3) Atribua o valor de a = 1. O que acontece com a função?

____
____
____

4) Por que o "a" não pode ser negativo? Exemplifique sua afirmação.

____
____
____

5) Descreva outras particularidades observadas por você quando se varia o "a".

____
____
____
____

APÊNDICE L – EXERCÍCIOS – SITUAÇÃO-PROBLEMAS COM FUNÇÃO LOGARITMICA

1) (UNIRIO) Um médico, após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 12 anos, obteve a fórmula h = $\log(10^{0,7}.\sqrt{i})$, onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela fórmula, uma criança de 10 anos desta cidade terá altura:

a) 120 cm
b) 123 cm
c) 125 cm
d) 128 cm
e) 130 cm

2) Economistas afirmam que a dívida externa de um determinado país crescerá segundo a lei: $y = 40.1{,}2^x$ sendo y o valor da dívida (em bilhões de dólares) e x o número de anos transcorridos após a divulgação dessa previsão. Em quanto tempo a dívida estará estimada em 90 bilhões de dólares? (use log2=0,3 e log3=0,48).
(Matemática Ciência e Aplicação – IEZZI, pág. 190)

3) A instalação de radares para controle da velocidade dos veículos em grandes avenidas de uma cidade proporcionou uma diminuição do número de acidentes. Esse número pode ser calculado pela lei: $n(t) = n(0).0{,}8^t$, sendo $n(0)$ o número de acidentes anuais registrado no ano da instalação dos radares e $n(t)$ o número de acidentes anuais t anos depois. Qual é o tempo necessário para que o número de acidentes se reduza à quarta parte da quantidade registrada no ano da instalação dos radares? (Use $\log 2 \cong 0{,}3$).
(Matemática Ciência e Aplicação – IEZZI, pág. 190)

4) Felipe aplicou 500 reais em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. Conforme aprenderemos em matemática financeira, o montante (valor inicial + juros recebidos) dessa aplicação, daqui a n meses, pode ser expresso por $M(n) = 500.(1{,}01)^n$.

a) Qual é o montante dessa aplicação após meio ano?
b) Qual é o tempo mínimo necessário que Felipe deve manter o dinheiro aplicado a fim de resgatar 800 reais? (use $\log 2 \cong 0{,}3$, $\log 5 \cong 0{,}7$ e $\log 1{,}01 \cong 0{,}004$).
(Matemática Ciência e Aplicação – IEZZI, pág. 190)

APÊNDICE M – ATIVIDADE INVESTIGATIVA SOBRE A FUNÇÃO y = a.ln(x+b)+c COM O AUXÍLIO DO *WINPLOT* NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

CÓDIGO: ______

Nome:____

<u>Definição:</u>

Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$, é denominada função logarítmica de base a.

<u>Dinâmica da atividade:</u>

Após ter instalado e observado os vídeos tutoriais e o *applet* referente à função exponencial disponibilizados no site www.profwendel.com.br, abra o *Winplot* e analise a função $y = a\ln(x+b)+c$, onde o coeficiente "a" não é zero, tendo como referencial a função logarítmica básica $y = \ln x$. Para responder aos três primeiros questionários abaixo, insira a função $y = \ln x$.

1) Plote a função $y = \ln(x+b)$. Varie o coeficiente "b" e descreva o que acontece.

____
____
____
____

2) Agora, insira o parâmetro "a" na função anterior. A função deve ficar $y = a\ln(x+b)$. Mantendo fixo o parâmetro "b", varie o parâmetro "a" e descreva o que acontece.

____
____
____
____

3) Por fim, insira o parâmetro "c" na função anterior de tal forma que se tenha $y = a\ln(x+b)+c$. Com os parâmetros "a" e "b" fixos, varie o parâmetro "c" e descreva o que acontece.

____
____
____
____

4) Que relação existe entre o gráfico de y=ln(x) e y=ln(-x)? E entre y=ln(x) e y=-ln(x)?

____
____
____
____
____
____

5) Apague os gráficos que estão plotados no plano. Agora esboce a função $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ (digite **log(2,x)**). Em seguida, descreva as características entre elas.

REFERÊNCIAS:

http://ecalculo.if.usp.br/ Último acesso <10/11/2010>

APÊNDICE N – ATIVIDADE INVESTIGATIVA SOBRE A FUNÇÃO $y = a\sqrt{x+b}+c$ COM O AUXÍLIO DO *WINPLOT* NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

CÓDIGO: ______

Nome: ____

Definição:

Seja “a” um número real não negativo. Dizemos que o número “b” é uma raiz quadrada de “a” se $b^2 = a$.

Dinâmica da atividade:

Após ter instalado e observado os vídeos tutoriais e o *applet* referente à função raiz quadrada disponibilizados no site www.profwendel.com.br, abra o *Winplot* e analise a função $y = a\sqrt{x+b}+c$, onde o coeficiente “a” não é zero, tendo como referencial a função raiz quadrada básica $y = \sqrt{x}$. Para responder aos três primeiros questionários abaixo, plote primeiramente no plano a função $y = \sqrt{x}$. Ela servirá de referência para as três primeiras perguntas.

1) Plote a função $y = \sqrt{x+b}$ (digite sqrt(x+b)). Varie o coeficiente “b” e descreva os movimentos ocorridos.

____
____
____

2) Agora, insira o parâmetro “a” na função anterior. A função deve ficar $y = a\sqrt{x+b}$. Mantendo fixo o parâmetro “b”, varie o parâmetro “a” e descreva os movimentos ocorridos.

____
____
____

3) Por fim, insira o parâmetro “c” na função anterior de tal forma que se tenha $y = a\sqrt{x+b}+c$. Com os parâmetros “a” e “b” fixos, varie o parâmetro “c” e descreva os movimentos ocorridos.

____
____
____
____

4) Esboce e determine o domínio e a imagem da função $y = 5\sqrt{x-4}$?

____
____
____
____

APÊNDICE O - TESTE FINAL

CÓDIGO: _____

Nome do Participante: _______________________________ Série/Período: ______________

1) Conceitue funções.

____

____

2) A despesa mensal de uma pequena empresa com encargos sociais é dada pela função $D(x) = 20 + \frac{x}{10}$, em que D(x) é a despesa em milhões de reais e x é o número de funcionários.

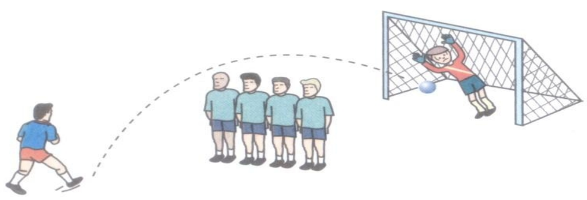
a. Qual será a despesa quando a empresa tiver 100 funcionários?

b. Qual será o número de funcionários quando a despesa dessa empresa for 50 milhões de reais?

c. Construa o gráfico da função D para $5 \leq x \leq 10$.

(Fonte: Matemática - Manuel Paiva – Volume Único – pág. 84)

3) A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola.



Supondo que a relação da altura h, (metros) e o tempo (segundos) após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determinar:

c. Em que instante a bola atinge a altura máxima;
d. O valor da altura máxima atingida pela bola.

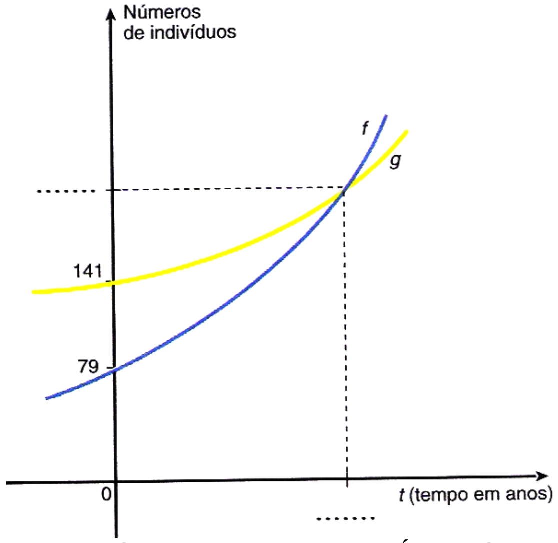
(Para refletir 5º) Livro do Dante (volume único). Pág. 86

4) Esboce as seguintes funções:

a) $f(x) = -\|2x - 6\|$	b) $f(x) = \frac{x}{2} - 2$	c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$	d) $f(x) = 2^x$	e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

5) As pesquisas de um antropólogo revelaram que as populações indígenas de duas reservas, A e B, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, e as expressões f(t) e g(t) representam o número de indivíduos dessas reservas, respectivamente.

a. Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de f(t) e g(t) são formados por pontos das curvas indicadas a seguir por f e g, respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, por que f(t) e g(t) só podem assumir valores naturais. Complete esta figura com as coordenadas do ponto comum a f e g.



Fonte: Matemática - Manuel Paiva – Volume Único – pág. 103/104

b. Daqui a quantos anos as duas reservas terão o mesmo número de indivíduos?

c. Daqui a 7 anos, qual será o número de indivíduos da reserva A?

6) (U.F. São Carlos-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$, com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, qual foi o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

APÊNDICE P – AVALIAÇÃO DO PARTICIPANTE QUANTO AO PROJETO

1) Você julga importante o uso de recursos tecnológicos como o *software* matemático *Winplot*, os vídeos tutoriais e os *applets* para o ensino aprendizado da matemática?
(   ) Sim   (   ) Não
Justifique:

____

____

____

____

2) O quanto esse projeto contribuiu para sua compreensão acerca de funções e suas representações gráficas?

____

____

____

____

____

Universidade Severino Sombra

Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática

APÊNDICE Q - Solicitação de autorização para pesquisa de dissertação de Mestrado

Solicito autorização da FEAP (Fundação Educacional de Além Paraíba), localizada em Além Paraíba-MG, para realizar estudos, pesquisas e aplicações de questionários em alunos da turma de 4º período do curso de Licenciatura em matemática da qual ministro a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. Tal pesquisa será parte constituinte da dissertação de mestrado de título **UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS** do mestrando **Wendel de Oliveira Silva**, matrícula 091142002.

Além Paraíba, _____ de ________________ de 2011.

Nome do responsável pela autorização: ______________________________

Assinatura do responsável pela autorização: __________________________

Obs: usar Carimbo Institucional

Obs: imprimir em duas cópias